# '94 年入試の良問の背景を探る

宮川(みやかわ)　幸隆(ゆきたか)

'94 年入試の有名大学の良問としては，東北大学(前期)の 6 番と東京工業大学(後期)の 2 番が目立ちました．本稿では，これらの背景を探ります．

まず，東北大の問題

> $x$ に関する多項式 $P_n(x)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ が，すべての実数 $\theta$ に対して
> $P_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ を満たすものとする．
> (i) $P_{n+1}(x)+P_{n-1}(x)$ を，$P_n(x)$ を用いて表せ．また $P_n(x)$ の次数を求めよ．
> (ii) $P_5(x)$ を求めよ．
> (iii) 方程式 $P_5(x)=1$ の異なる実数解の個数を求めよ．

の背景を探ります．

そのために，本試前号に掲載された筆者の記事「大学入試の背景を探る」の中の東京工大 '90 年後期の問題と関連づけますので，その問題を再録します：

記号の重複を避けるために，表記を少し変えます．

> $n$ を 2 以上の整数とする．
> (i) $(n-1)$ 次多項式 $F_n(x)$ と $n$ 次多項式 $G_n(x)$ ですべての実数 $\theta$ に対して
> $\sin(2n\theta)=n\sin(2\theta)F_n(\sin^2\theta)$,
> $\cos(2n\theta)=G_n(\sin^2\theta)$
> を満たすものが存在することを帰納法を用いて示せ．
> (ii) $k=1, 2, \cdots\cdots, n-1$ に対して
> $a_k=\left(\sin\dfrac{k\pi}{2n}\right)^{-2}$ とおくと
> $F_n(x)=(1-a_1x)(1-a_2x)\cdots\cdots(1-a_{n-1}x)$
> となることを示せ．
> (iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}a_k=\frac{2n^2-2}{3}$ を示せ．
> 〔'90 年　東京工大(後期)〕

さて，上の東北大の問題の解説にあたっては，この東京工大 '90 年後期の問題の結論を自由に使うこととします．更には，本試前号の筆者の記事の中で得られた結果をも自由に使うこととします．詳細は前号を御参照下さい．

筆者は，この東北大の問題を見た瞬間に，上記の東京工大の超良難問と関連づけて背景を探れるハズだと信じました．その確信を立証することが本稿の 1 つの目標です．

まず，$n\geqq 2$ のときは，

$$\cos(2n\theta)=G_n(\sin^2\theta)$$

であるから，

$$\cos n\theta=G_n\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right)=G_n\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)=P_n(\cos\theta)$$

である．よって，$P_n(x)$ の次数は $G_n(x)$ の次数の $n$ に等しい．

$n=0$ のときは

$P_0(\cos\theta)=\cos 0=1$ により，$P_0(x)=1$,

$n=1$ のときは

$P_1(\cos\theta)=\cos\theta$ により，$P_1(x)=x$

であるから，$n=0, 1, 2, \cdots\cdots$ に対して，**$P_n(x)$ の次数は $n$ である．**

$$\boldsymbol{P_{n+1}(x)+P_{n-1}(x)=2x\cdot P_n(x)} \quad \cdots\cdots ①$$

となりますが，これは三角関数の和積公式から簡単に得られます．以上で上の東北大の問題の(i)は解決しました．

次に(ii)ですが，上の漸化式①を用いないで，直接 $P_5(x)$ を求めてみましょう．

漸化式①などを用いないで，$P_5(x)$ を東京工大 '90 年後期の問題の $F_5(x)$ で表すことを考えるのです．

$n\geqq 2$ のとき

$$\sin(2n\theta)=n\sin(2\theta)F_n(\sin^2\theta)$$

の両辺を $\theta$ で微分することによって，

$\cos 2n\theta$

$$=\cos 2\theta F_n(\sin^2\theta)+2\sin^2\theta\cos^2\theta F_n'(\sin^2\theta)$$

となるが，これから，

$$\cos n\theta=\cos\theta F_n\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)+2\cdot\frac{1-\cos\theta}{2}\cdot\frac{1+\cos\theta}{2}F_n'\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)$$

となる．いま $P_5(x)$ を求めるのであるから，$n=5$ であり，

$$P_5(\cos\theta)=\cos 5\theta=\cos\theta F_5\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)+\frac{1-\cos^2\theta}{2}F_5'\left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)$$

により，

$$\boldsymbol{P_5(x)=xF_5\left(\frac{1-x}{2}\right)+\frac{1-x^2}{2}F_5'\left(\frac{1-x}{2}\right)}\quad\cdots\cdots ②$$

さて，

$$F_5(x)=(1-\alpha_1x)(1-\alpha_2x)(1-\alpha_3x)(1-\alpha_4x)$$

であって，

$$\alpha_1=\left(\sin^2\frac{\pi}{10}\right)^{-1},\ \alpha_2=\left(\sin^2\frac{\pi}{5}\right)^{-1},\ \alpha_3=\left(\cos^2\frac{\pi}{5}\right)^{-1},$$
$$\alpha_4=\left(\cos^2\frac{\pi}{10}\right)^{-1}$$

である［∵　東京工大 '90 年後期の問題の(ii)］から，

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4=\left\{\frac{1}{4}\sin^4\frac{\pi}{5}\left(1-\sin^2\frac{\pi}{5}\right)\right\}^{-1},$$

$$-\alpha_1\alpha_2\alpha_3-\alpha_1\alpha_2\alpha_4-\alpha_1\alpha_3\alpha_4-\alpha_2\alpha_3\alpha_4$$
$$=-\left(\sin^2\frac{\pi}{10}\sin^2\frac{\pi}{5}\cos^2\frac{\pi}{5}\right)^{-1}-\left(\sin^2\frac{\pi}{10}\sin^2\frac{\pi}{5}\cos^2\frac{\pi}{10}\right)^{-1}-\left(\sin^2\frac{\pi}{10}\cos^2\frac{\pi}{5}\cos^2\frac{\pi}{10}\right)^{-1}-\left(\sin^2\frac{\pi}{5}\cos^2\frac{\pi}{5}\cos^2\frac{\pi}{10}\right)^{-1}$$
$$=-\left(\sin^2\frac{\pi}{5}\cos^2\frac{\pi}{5}\sin^2\frac{\pi}{10}\cos^2\frac{\pi}{10}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{4}\sin^4\frac{\pi}{5}\right)^{-1}-\left(\frac{1}{4}\sin^2\frac{\pi}{5}\cos^2\frac{\pi}{5}\right)^{-1}$$
$$=-\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4-\left\{\frac{1}{4}\sin^4\frac{\pi}{5}\left(1-\sin^2\frac{\pi}{5}\right)\right\}^{-1}$$
$$=-2\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4,$$

$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_4$$
$$=\left(\sin^2\frac{\pi}{10}\sin^2\frac{\pi}{5}\right)^{-1}+\left(\sin^2\frac{\pi}{10}\cos^2\frac{\pi}{5}\right)^{-1}+\left(\sin^2\frac{\pi}{10}\cos^2\frac{\pi}{10}\right)^{-1}+\left(\sin^2\frac{\pi}{5}\cos^2\frac{\pi}{5}\right)^{-1}+\left(\sin^2\frac{\pi}{5}\cos^2\frac{\pi}{10}\right)^{-1}+\left(\cos^2\frac{\pi}{5}\cos^2\frac{\pi}{10}\right)^{-1}$$
$$=\left(\sin^2\frac{\pi}{5}\sin^2\frac{\pi}{10}\cos^2\frac{\pi}{10}\right)^{-1}+\left(\cos^2\frac{\pi}{5}\sin^2\frac{\pi}{10}\cos^2\frac{\pi}{10}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{4}\sin^2\frac{\pi}{5}\right)^{-1}+\left\{\sin^2\frac{\pi}{5}\left(1-\sin^2\frac{\pi}{5}\right)\right\}^{-1}$$
$$=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4+\left(\frac{1}{4}\sin^2\frac{\pi}{5}\right)^{-1}+\left\{\sin^2\frac{\pi}{5}\left(1-\sin^2\frac{\pi}{5}\right)\right\}^{-1},$$

$$-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4=-\frac{2\times5^2-2}{3}=-16$$

［∵　東京工大 '90 年後期の問題の(iii)による］，

となって，$\boldsymbol{\sin^2\frac{\pi}{5}}$ **の値さえわかれば，**

$$\boldsymbol{F_5(x)=1-16x+\alpha_2x^2+\alpha_3x^3+\alpha_4x^4}$$

**としたときの $\alpha_2$，$\alpha_3$，$\alpha_4$ の値がわかる．**

**一方，$\frac{\pi}{5}$，$\frac{2\pi}{5}$ は $\sin^2 3\theta=\sin^2 2\theta$ を満たすから，**$(3-4\sin^2\theta)^2=4(1-\sin^2\theta)$ を満たし，

$\boldsymbol{\sin^2\frac{\pi}{5}}$ **は $16s^2-20s+5=0$ の小根である．**

よって，

$$\sin^2\frac{\pi}{5}=\frac{10-\sqrt{100-80}}{16}=\frac{5-\sqrt5}{8}.$$

以上から，

$$\alpha_4=\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{5-\sqrt5}{8}\right)^2\frac{3+\sqrt5}{8}\right\}^{-1}=\frac{2^8}{5},$$

$$\alpha_3=-2\times\frac{2^8}{5}=-\frac{2^9}{5},$$

$$\alpha_2=\frac{2^8}{5}+\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{5-\sqrt5}{8}\right)^{-1}+\left(\frac{5-\sqrt5}{8}\cdot\frac{3+\sqrt5}{8}\right)^{-1}$$
$$=\frac{2^8}{5}+\frac{4\cdot8}{5-\sqrt5}\left(1+\frac{2}{3+\sqrt5}\right)=\frac{2^4\cdot3\cdot7}{5}$$

となり，

$$\boldsymbol{F_5(x)=1-2^4x+\frac{2^4\cdot3\cdot7}{5}x^2-\frac{2^9}{5}x^3+\frac{2^8}{5}x^4}\quad\cdots\cdots ③$$

である．よって，

$$\boldsymbol{F_5'(x)=-2^4+\frac{2^5\cdot3\cdot7}{5}x-\frac{3\cdot2^9}{5}x^2+\frac{2^{10}}{5}x^3}\quad\cdots\cdots ④$$

であり，②，③，④から $P_5(x)$ は原理的には求まる．

しかし，③，④から

$$F_5\left(\frac{1-x}{2}\right),\ F_5'\left(\frac{1-x}{2}\right)$$

を求め，それらを②へ代入するというやり方では大変なので，以下の様に考える：

$$P_5(x)=b_5x^5+b_4x^4+b_3x^3+b_2x+b_1x+b_0$$

とおくと，

$$P_5^{(5)}(0)=120b_5,\quad P_5^{(4)}(0)=24b_4,$$

$$P_5^{(3)}(0)=6b_3,\quad P_5''(0)=2b_2,$$

$$P_5'(0)=b_1,\qquad P_5(0)=b_0$$

であるから，

$$\boldsymbol{b_0}=P_5(0)=\frac{1}{2}F_5'\left(\frac{1}{2}\right)\boldsymbol{=0,}$$

次に $b_1$ を求めるために，②の両辺を $x$ で微分して，

$$P_5'(x)$$

$$=F_5\left(\frac{1-x}{2}\right)-\frac{x}{2}F_5'\left(\frac{1-x}{2}\right)-xF_5'\left(\frac{1-x}{2}\right)$$

$$-\frac{1-x^2}{4}F_5''\left(\frac{1-x}{2}\right)$$

$$=F_5\left(\frac{1-x}{2}\right)-\frac{3x}{2}F_5'\left(\frac{1-x}{2}\right)$$

$$-\frac{1-x^2}{4}F_5''\left(\frac{1-x}{2}\right)\ \cdots\cdots ⑤,$$

$$\therefore\quad b_1=P_5'(0)=F_5\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}F_5''\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$F_5''(x)=\frac{2^5\cdot3\cdot7}{5}-\frac{3\cdot2^{10}}{5}x+\frac{3\cdot2^{10}}{5}x^2$$

であるから，

$$\boldsymbol{b_1}$$

$$=1-2^3+\frac{2^2\cdot3\cdot7}{5}-\frac{2^6}{5}+\frac{2^4}{5}-\frac{2^3\cdot3\cdot7}{5}$$

$$+\frac{3\cdot2^7}{5}-\frac{3\cdot2^6}{5}$$

$$\boldsymbol{=5,}$$

次に $b_2$ を求めるために，⑤の両辺を $x$ で微分して，

$$P_5''(x)$$

$$=-\frac{1}{2}F_5'\left(\frac{1-x}{2}\right)-\frac{3}{2}F_5'\left(\frac{1-x}{2}\right)+\frac{3x}{4}F_5''\left(\frac{1-x}{2}\right)$$

$$+\frac{2x}{4}F_5''\left(\frac{1-x}{2}\right)+\frac{1-x^2}{8}F_5^{(3)}\left(\frac{1-x}{2}\right)$$

$$=-2F_5'\left(\frac{1-x}{2}\right)+\frac{5x}{4}F_5''\left(\frac{1-x}{2}\right)$$

$$+\frac{1-x^2}{8}F_5^{(3)}\left(\frac{1-x}{2}\right)\ \cdots\cdots ⑥$$

$$\therefore\quad 2b_2=P_5''(0)=\frac{1}{8}F_5^{(3)}\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$F_5^{(3)}(x)=-\frac{3\cdot2^{10}}{5}+\frac{3\cdot2^{11}}{5}x$$

であるから，

$$2b_2=0\quad\therefore\ \boldsymbol{b_2=0,}$$

次に $b_3$ を求めるために，⑥の両辺を $x$ で微分して，

$$P_5^{(3)}(x)$$

$$=F_5''\left(\frac{1-x}{2}\right)+\frac{5}{4}F_5''\left(\frac{1-x}{2}\right)-\frac{5x}{8}F_5^{(3)}\left(\frac{1-x}{2}\right)$$

$$-\frac{2x}{8}F_5^{(3)}\left(\frac{1-x}{2}\right)-\frac{1-x^2}{16}F_5^{(4)}\left(\frac{1-x}{2}\right)$$

$$=\frac{9}{4}F_5''\left(\frac{1-x}{2}\right)-\frac{7x}{8}F_5^{(3)}\left(\frac{1-x}{2}\right)$$

$$-\frac{1-x^2}{16}F_5^{(4)}\left(\frac{1-x}{2}\right)\ \cdots\cdots ⑦,$$

$$\therefore\quad 6b_3=P_5^{(3)}(0)=\frac{9}{4}F_5''\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{16}F_5^{(4)}\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$F_5^{(4)}(x)=\frac{3\cdot2^{11}}{5}$$

であるから，

$$6b_3$$

$$=\frac{3^2}{2^2}\left(\frac{2^5\cdot3\cdot7}{5}-\frac{3\cdot2^9}{5}+\frac{3\cdot2^8}{5}\right)-\frac{1}{2^4}\cdot\frac{3\cdot2^{11}}{5}$$

$$=-3\cdot2^3\cdot5$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{b_3=-20,}$$

次に $b_4$ を求めるために，⑦の両辺を $x$ で微分して，

$$P_5^{(4)}(x)$$

$$=-\frac{9}{8}F_5^{(3)}\left(\frac{1-x}{2}\right)-\frac{7}{8}F_5^{(3)}\left(\frac{1-x}{2}\right)$$

$$+\frac{7x}{16}F_5^{(4)}\left(\frac{1-x}{2}\right)+\frac{2x}{16}F_5^{(4)}\left(\frac{1-x}{2}\right)$$

$$+\frac{1-x^2}{32}F_5^{(5)}\left(\frac{1-x}{2}\right)$$

$$=-2F_5^{(3)}\left(\frac{1-x}{2}\right)+\frac{9x}{16}F_5^{(4)}\left(\frac{1-x}{2}\right)\ \cdots\cdots ⑧,$$

$$\therefore\quad 24b_4=P_5^{(4)}(0)=0\quad\therefore\quad \boldsymbol{b_4=0,}$$

最後に $b_5$ を求めるために，⑧の両辺を $x$ で微分して，

$$P_5^{(5)}(x)$$

$$=F_5^{(4)}\left(\frac{1-x}{2}\right)+\frac{9}{16}F_5^{(4)}\left(\frac{1-x}{2}\right)-\frac{9x}{32}F_5^{(5)}\left(\frac{1-x}{2}\right)$$

$$=\frac{25}{16}F_5^{(4)}\left(\frac{1-x}{2}\right),$$

$$\therefore\quad 120b_5$$

$$=P_5^{(5)}(0)=\frac{25}{16}F_5^{(4)}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5^2}{2^4}\cdot\frac{3\cdot2^{11}}{5}=5\cdot3\cdot2^7,$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{b_5=16,}$$

以上によって，$\boldsymbol{P_5(x)=16x^5-20x^3+5x}$.

次に(iii)ですが，②，③，④により，

$$\begin{aligned}
&P_5(x)-1\\
&=x-1\\
&\quad -x(1-x)\left\{2^3-\frac{2^2\cdot3\cdot7}{5}(1-x)\right.\\
&\qquad\qquad \left.+\frac{2^6}{5}(1-x)^2-\frac{2^4}{5}(1-x)^3\right\}\\
&\quad -(1+x)(1-x)\left\{2^3-\frac{2^3\cdot3\cdot7}{5}(1-x)\right.\\
&\qquad\qquad \left.+\frac{3\cdot2^6}{5}(1-x)^2-\frac{2^6}{5}(1-x)^3\right\}
\end{aligned}$$

であるから，$x-1=y$ とおくと $x=y+1$ であり，

$$\begin{aligned}
&P_5(y+1)-1\\
&=y+(y+1)y\left(2^3+\frac{2^2\cdot3\cdot7}{5}y+\frac{2^6}{5}y^2+\frac{2^4}{5}y^3\right)\\
&\quad +(y+2)y\left(2^3+\frac{2^3\cdot3\cdot7}{5}y+\frac{3\cdot2^6}{5}y^2+\frac{2^6}{5}y^3\right)\\
&=y\left\{1+(y+1)\left(2^3+\frac{2^2\cdot3\cdot7}{5}y+\frac{2^6}{5}y^2+\frac{2^4}{5}y^3\right)\right.\\
&\quad \left.+(y+2)\left(2^3+\frac{2^3\cdot3\cdot7}{5}y+\frac{3\cdot2^6}{5}y^2+\frac{2^6}{5}y^3\right)\right\}\\
&=y\left[1+2^3+2^4+\left\{2^4+\frac{2^2\cdot3\cdot7(1+2^2)}{5}\right\}y\right.\\
&\quad +\frac{2^6+3\cdot2^7+2^2\cdot3^2\cdot7}{5}y^2\\
&\quad \left.+\frac{2^6(1+3)+2^4(1+2^3)}{5}y^3+\frac{2^4(1+2^2)}{5}y^4\right]\\
&=y(25+100y+140y^2+80y^3+16y^4)\\
&=y(5+10y+4y^2)^2.
\end{aligned}$$

よって，$P_5(y+1)-1=0$ の実数解は

$$0,\ \frac{-5\pm\sqrt{25-20}}{4} \text{ の3個}$$

であるから，**$P_5(x)-1=0$ の実数解も3個である.**

次に，東京工大の問題

> 自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，$(2-\sqrt{3}\,)^n$ という形の数を考える．これらの数はいずれも，それぞれ適当な自然数$m$が存在して
>
> $$\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$$
>
> という表示をもつことを示せ.

の背景を探ります.

この問題の解説にあたっても，「数研通信 No. 9」に掲載された筆者の記事「大学入試の背景を探る」の中の「実2次体の単数」を参考にします．しかしそれをお持ちでない方もおられるでしょうから，要点を再録します：

そこでは，’88年の京都大(理系)に出題された行列の問題

> $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ とする.
>
> (1) 省略
>
> (2) $x$，$y$ が $x^2-3y^2=1$ を満たす自然数ならば，ある自然数$n$をとると
>
> $$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$
>
> となることを示せ.　〔’88年　京都大・理系〕

の背景を探りました.

上の東京工大の問題の解説にあたっては，この京都大の問題の結論を自由に使うこととします.

筆者は，この東京工大の問題を見た瞬間に，上記の京都大の良問と関連づけて背景を探れるハズだと，やはり確信しました．今からそれを立証します.

まず，$(x,\ y)=(2,\ 1)$ とすると，

$$x^2-3y^2=4-3=1$$

であるから，上の京都大の問題により，

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

となる自然数$n$が存在するが，実はこの$n$は1に等しい．実際，

$$\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-3\\ -2+2\end{pmatrix}$$

であるからである．これは，

$$A^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

と同値であり，

$$(A^{-1})^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix},$$

$$(A^{-1})^3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26\\15\end{pmatrix},$$

………

となるが，

$$A^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\longleftrightarrow 2-\sqrt{3},$$

$$(A^{-1})^2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$$

$$\longleftrightarrow 7-4\sqrt{3}=(2-\sqrt{3}\,)^2,$$

………

のように，任意の自然数$n$に対して

$$(A^{-1})^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\longleftrightarrow(2-\sqrt{3})^n$$

と対応している（正確には帰納法による）．さて，

$$2-\sqrt{3}=\sqrt{4}-\sqrt{3},$$
$$(2-\sqrt{3})^2=7-4\sqrt{3}=\sqrt{49}-\sqrt{48},$$

………

等であるから，上の東京工大の問題の解説のためには

$$(A^{-1})^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

を求める必要に迫られるが，

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&\sqrt{3}\\-1&\sqrt{3}\end{pmatrix}A^{-1}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&-\sqrt{3}\\1&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2+\sqrt{3}&0\\0&2-\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

であるから，

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&\sqrt{3}\\-1&\sqrt{3}\end{pmatrix}(A^{-1})^n\begin{pmatrix}\sqrt{3}&-\sqrt{3}\\1&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}(2+\sqrt{3})^n&0\\0&(2-\sqrt{3})^n\end{pmatrix},$$

$\therefore\quad(A^{-1})^n$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&-\sqrt{3}\\1&1\end{pmatrix}$$
$$\times\begin{pmatrix}(2+\sqrt{3})^n&0\\0&(2-\sqrt{3})^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\sqrt{3}\\-1&\sqrt{3}\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&-\sqrt{3}\\1&1\end{pmatrix}$$
$$\times\begin{pmatrix}(2+\sqrt{3})^n&\sqrt{3}(2+\sqrt{3})^n\\-(2-\sqrt{3})^n&\sqrt{3}(2-\sqrt{3})^n\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n\}&3\{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n\}\\(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n&\sqrt{3}\{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n\}\end{pmatrix},$$

$\therefore\quad(A^{-1})^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n\}\\(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\dfrac{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n}{2}\\\dfrac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

一方

$$(2+\sqrt{3})^n=a+b\sqrt{3}$$

とすると

$$(2-\sqrt{3})^n=a-b\sqrt{3}$$

で$a$，$b$は自然数であるから，

$$\left\{\frac{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n}{2}\right\}^2=a^2=m$$

は自然数であり，

$$b=\frac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$$

であって，

$$(2-\sqrt{3})^n=a-b\sqrt{3}=\sqrt{m}-\sqrt{3b^2}$$
$$=\sqrt{m}-\sqrt{\frac{\{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n\}^2}{4}}$$
$$=\sqrt{m}-\sqrt{\frac{\{(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n\}^2-4}{4}}$$
$$=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$$

という表示をもつことがわかった．

それにしても，1986年大阪教育大，1988年慶応大医学部，京都大理系，1990年東京工大後期，1992年東北大前期理系，千葉大，早稲田大理工，茨城大前期工学部，東北学院大工学部，1994年東北大前期，東京工大後期……と，偶数の年には，大学の数学を背景にした興味深い問題が目立ちます．

（静岡県立 沼津東高等学校）

このたびの阪神・淡路大震災（兵庫県南部地震）により，被害を受けられた皆様に対し，心よりお見舞い申し上げます．

また，1日も早く元の生活を取り戻されますよう，お祈り申し上げます．

（数研出版 編集部）