Irisunaの定理

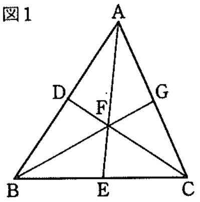
（Menelausの定理・Cevaの定理を含む）

入砂（いりすな）　七五三一（しめいち）

1．はじめに　平成6年の「数研通信19号」ではIrisunaの定理への過程と代表元の証明を中心に発表しました．今回は一般的証明から更に発展させた関連の定理を紹介し，また入試問題への応用も述べてみたいと考えます．まず，Irisunaの定理と第2定理を紹介します．

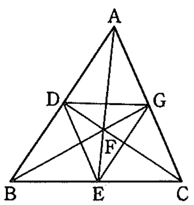
2．Irisunaの定理

図1



三角形ABCの頂点A，B，Cと内部の点Fとを結ぶ直線が，対辺AB，BC，CAと交わる点をそれぞれD，E，Gとする．点Pは△ABCの周および内部の線分上を動くものとする．点Pが線分ADからDBあるいは線分ABからBDへ動くとき“返り点”の個数は，それぞれ0，1であるという．また，それぞれの線分の比を$\dfrac{AD}{DB}$，$\dfrac{AB}{BD}$と表す．他の場合も同様に定めると，点Pが“返り点” 0(個)または1(個)で動くとき，点A，B，C，D，E，F，Gのどこから動いても再びもとの点に戻るならば，どんなときも動点Pに対応する線分の比の積は1である．

3．Irisunaの第2定理



Irisunaの定理で，動点Pが線分DG，GE，ED上は返り点0(個)で動き，他は返り点0(個)または1(個)で動くならば，点A，B，C，D，E，F，Gのどこから動いても，再びもとの点に戻るならば，どんなときも動点Pに対応する線分の比の積は1である．

4．用語の定義

Irisunaの定理を一般的に証明するため，また，更に定理を発展させるために，用語や記号を明らかにします．

【定義】　動点Pは△ABCの周および内部の線分上を動くものとする(△ABCは図1とする)．

［1］　返り点について

(1)　動点Pが線分ADからDBあるいは線分BDからDAへ動くときは，返り点0個であるという．

(2)　動点Pが線分ABからBDあるいは線分DAからABへ動くときは，返り点1個であるという．他の線分上も同様である．

［2］　動点Pに対応する線分の比の関係

(1)では線分の比はそれぞれ$\dfrac{AD}{DB}$，$\dfrac{BD}{DA}$と表す．

(2)ではそれぞれ$\dfrac{AB}{BD}$，$\dfrac{DA}{AB}$と表す．

［3］　返り点(0または1)を表す点は，(1)では点D，(2)では点B，Aとなる．

注)　返り点0個または1個を返り点0または1ということもある．

［4］　$R_i^j=1$は動点Pがある点を始点として返り点1または0で動いてもとに戻るとき，返り点1および0を表す点の総数はそれぞれi個，$(j-i)$個であり，かつj個の線分の比の積が1であることを表している．例えば，$R_2^3=1$は返り点2つで3つの比の積が1であることを表す．また，この動点Pによって描かれる図形を$R_i^j=1$を表す図形(image)という．ただし，同一線分上で向きが互いに逆のものは消去されるものとする．

［5］　Irisunaの定理を表す代表元のimageとは，

$R_i^j=1$ を表す図形（image）のうち，互いに異なる図形をいう．また，$R_i^j=1$ を代表元という．ただし，image が同じときは返り点の少ない方とする．

5．補題

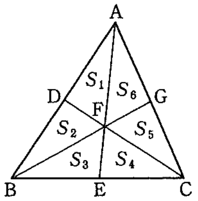
Irisuna の定理，第 2 定理を証明するために，補題を準備します．

《補題 1》 Irisuna の定理は次の $R_3^3=1$ を用いて証明される．

【R_3^3】 $\dfrac{AB}{BD}\cdot\dfrac{DC}{CF}\cdot\dfrac{FE}{EA}=1$ を証明する．

全体の面積を S とし，分割した面積を図のようにする．

証明 （略）数研通信 19 号参照



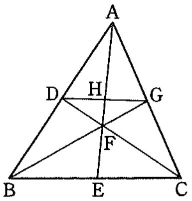
《補題 2》 Irisuna の第 2 定理は次の $R_2^3(D\dot{H}G)$ を用いて証明される．

DG と AE の交点をHとする．

【$R_2^3(D\dot{H}G)$】 つまり

$$\frac{DH}{HG}\cdot\frac{GC}{CA}\cdot\frac{AB}{BD}=1$$

を証明する．



△ADC で $R_1^3=1$ から $\dfrac{DH}{HG}\cdot\dfrac{GA}{AC}\cdot\dfrac{CF}{FD}=1$ …①

△ABC で $R_1^3=1$ から $\dfrac{DF}{FC}\cdot\dfrac{CG}{GA}\cdot\dfrac{AB}{BD}=1$ …②

①×②より $\dfrac{DH}{HG}\cdot\dfrac{GC}{CA}\cdot\dfrac{AB}{BD}=1$ となる．

6．Irisuna の定理の証明（その 1）

定義と補題を用いて Irisuna の定理を証明します．

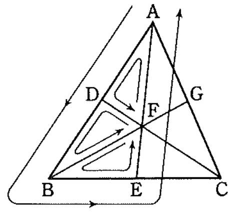
具体的な代表元の証明を説明することにより，一般的証明の概要とする．

【証明】 返り点 0，1 に対する比

$$\frac{AD}{DB},\ \frac{AB}{BD},\ \frac{DA}{AB}$$ には

それぞれ向きをもった線分 AB，AD，DB を対応させると，一直線上の 3 点 A，D，B に対して，比と線分が 1：1 に対応する．よって，動点Pの動きには，それぞれ線分 AB，AD，DB が対応する．そうすると動点Pが線分 AB→BE→EA，つまり向きのある △ABE の外周を動くときには，返り点 1 つで 3 つの線分の比の積

R_1^3：$\dfrac{AD}{DB}\cdot\dfrac{BC}{CE}\cdot\dfrac{EF}{FA}$ が対応している．他の R_i^j も同様に考える．また，動点PのDF→FD には $\dfrac{DC}{CF}\cdot\dfrac{FC}{CD}$ が対応し，線分 DF が消去される．… ①　また，AD→DB には



$\dfrac{AB}{BD}\cdot\dfrac{DA}{AB}=\dfrac{AD}{DB}$ となり線分 AB と同じである．

…… ②

一般に △ABC の内部の 6 つに分割された小三角形に，向きをつけた外周を対応させると，これらは返り点 3 つで 3 つの線分の比の積 $R_3^3=1$ が対応する．よって，動点Pがもとの点に戻るあらゆる動きでできる図形は，①（線分の消去），②（線分の分割）により $R_3^3=1$ に対応する向きをもった小三角形の外周の連鎖によって描かれる．つまり，動点Pによって描かれる図形に対応する線分の比の積は，$R_3^3=1$ を表す線分の比の積となる．よって，動点Pがもとの点に戻るときの線分の比の積は 1 である．

（証明終わり）

注） 帰納法による別証がある．

7．Irisuna の第 2 定理の証明

第 2 定理も，Irisuna の定理と同じように定義と補題を用いて証明されます．

【証明】 《補題 2》 $R_2^3(D\dot{H}G)=1$ から

$$\frac{DH}{HG}=\frac{DB}{BA}\cdot\frac{AC}{CG}$$

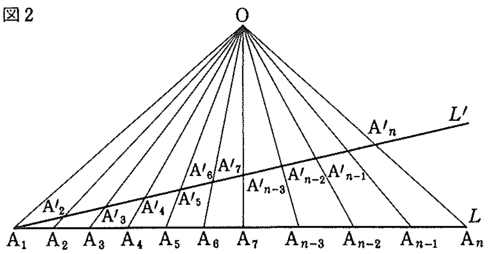
これは動点Pが返り点 0 で線分 DG を動くことが，DA から AG へ動くのと同じことを表している．線分 GE，ED についても同様である．ゆえに Irisuna の定理を組み合わせることによって，動点Pによる線分とそれに対応する比の関係から線分の比の積は 1 である．　（証明終わり）

8．線束の定理

Irisuna の定理および第 2 定理を発展させて，いくつかの定理を得ていますが，本稿では，線束の定理（新）と $R_0^3=1$ の拡張定理（新）を発表します．これらの定理を用いると，チェバの定理〔$(2n-1)$ 角形〕が簡単に証明できることがわかります．

（10．参照）

図2



[1] 線束の第1定理

図2のように線束に2直線 L，L' が交わっているとき，次の式が成り立つ．

(1) n が偶数のとき

(ア) $$\frac{A_nA_1}{A_1A_2}\cdot\frac{A_2A_3}{A_3A_4}\cdot\frac{A_4A_5}{A_5A_6}\cdots\frac{A_{n-2}A_{n-1}}{A_{n-1}A_n}=\frac{A'_nA_1}{A_1A'_2}\cdot\frac{A'_2A'_3}{A'_3A'_4}\cdot\frac{A'_4A'_5}{A'_5A'_6}\cdots\frac{A'_{n-2}A'_{n-1}}{A'_{n-1}A'_n}$$

(イ) $$\frac{A_1A_2}{A_2A_3}\cdot\frac{A_3A_4}{A_4A_5}\cdot\frac{A_5A_6}{A_6A_7}\cdots\frac{A_{n-3}A_{n-2}}{A_{n-2}A_{n-1}}\cdot\frac{A_{n-1}A_n}{A_nA_1}=\frac{A_1A'_2}{A'_2A'_3}\cdot\frac{A'_3A'_4}{A'_4A'_5}\cdot\frac{A'_5A'_6}{A'_6A'_7}\cdots\frac{A'_{n-3}A'_{n-2}}{A'_{n-2}A'_{n-1}}\cdot\frac{A'_{n-1}A'_n}{A'_nA_1}$$

(2) n が奇数のとき

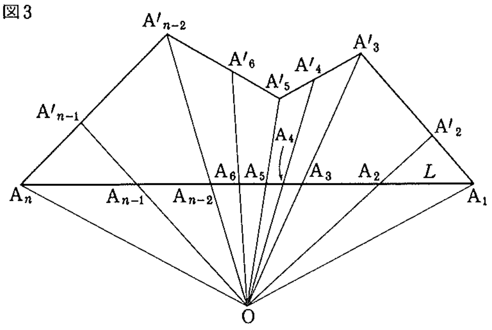
$$\frac{A_1A_2}{A_2A_3}\cdot\frac{A_3A_4}{A_4A_5}\cdot\frac{A_5A_6}{A_6A_7}\cdots\frac{A_{n-2}A_{n-1}}{A_{n-1}A_n}=\frac{A_1A'_2}{A'_2A'_3}\cdot\frac{A'_3A'_4}{A'_4A'_5}\cdot\frac{A'_5A'_6}{A'_6A'_7}\cdots\frac{A'_{n-2}A'_{n-1}}{A'_{n-1}A'_n}\cdot\frac{A'_nO}{OA_n}$$

[2] 線束の第2定理

Oを中心とする線束と直線 L との交点を A_1，A_2，A_3，……，A_{n-2}，A_{n-1}，A_n とし，それに対応して，直線 L の点Oとは反対側に折れ線 $(A_1,\ A'_2,\ A'_3)$，$(A'_3,\ A'_4,\ A'_5)$，……，$(A'_{n-2},\ A'_{n-1},\ A_n)$ をとると次の式が成り立つ．ただし，n は奇数とする．

$$\frac{A_1A'_2}{A'_2A'_3}\cdot\frac{A'_3A'_4}{A'_4A'_5}\cdots\cdots\frac{A'_{n-2}A'_{n-1}}{A'_{n-1}A_n}=\frac{A_1A_2}{A_2A_3}\cdot\frac{A_3A_4}{A_4A_5}\cdots\cdots\frac{A_{n-2}A_{n-1}}{A_{n-1}A_n}$$

図3



[3] 補題 $R_2{}^3(DHG)=1$ についての拡張

線束の定理を証明するために，補題を準備します．

《補題》 $R_2{}^4(DHG)=1$ つまり

$$\frac{DH}{HG}\cdot\frac{GA}{AC}\cdot\frac{CE}{EB}\cdot\frac{BA}{AD}=1 \qquad \cdots\cdots\ (a)$$

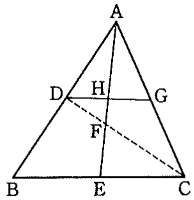
が成り立つ．

【証明】 線分CDとAEの交点をFとすると，△ADCで $R_1{}^3=1$ であるから

$$\frac{DH}{HG}\cdot\frac{GA}{AC}\cdot\frac{CF}{FD}=1 \qquad \cdots\cdots\ ①$$

また△ABCで $R_1{}^3=1$ であるから

$$\frac{DF}{FC}\cdot\frac{CE}{EB}\cdot\frac{BA}{AD}=1 \qquad \cdots\cdots\ ②$$



①，②を辺々掛けて，(a)が成り立つ．

[4] 線束の第1定理を証明する（図2）

【証明】 (1) n が偶数のとき

(ア) $R_4{}^4=1$ から

$$\frac{A_nA_1}{A_1A_2}\cdot\frac{A_2O}{OA'_2}\cdot\frac{A'_2A_1}{A_1A'_n}\cdot\frac{A'_nO}{OA_n}=1$$

$R_2{}^4(DHG)=1$ の補題から

$$\frac{A_2A_3}{A_3A_4}\cdot\frac{A_4O}{OA'_4}\cdot\frac{A'_4A'_3}{A'_3A'_2}\cdot\frac{A'_2O}{OA_2}=1$$

$$\frac{A_4A_5}{A_5A_6}\cdot\frac{A_6O}{OA'_6}\cdot\frac{A'_6A'_5}{A'_5A'_4}\cdot\frac{A'_4O}{OA_4}=1$$

………

$$\frac{A_{n-4}A_{n-3}}{A_{n-3}A_{n-2}}\cdot\frac{A_{n-2}O}{OA'_{n-2}}\cdot\frac{A'_{n-2}A'_{n-3}}{A'_{n-3}A'_{n-4}}\cdot\frac{A'_{n-4}O}{OA_{n-4}}=1$$

$$\frac{A_{n-2}A_{n-1}}{A_{n-1}A_n}\cdot\frac{A_nO}{OA'_n}\cdot\frac{A'_nA'_{n-1}}{A'_{n-1}A'_{n-2}}\cdot\frac{A'_{n-2}O}{OA_{n-2}}=1$$

辺々掛けて整理すると

$$\frac{A_nA_1}{A_1A_2}\cdot\frac{A_2A_3}{A_3A_4}\cdots\cdots\frac{A_{n-2}A_{n-1}}{A_{n-1}A_n}=\frac{A'_nA_1}{A_1A'_2}\cdot\frac{A'_2A'_3}{A'_3A'_4}\cdots\cdots\frac{A'_{n-2}A'_{n-1}}{A'_{n-1}A'_n}$$

(イ) 同様にして，$R_1{}^3=1$，$R_2{}^4=1$，……，$R_3{}^3=1$ つまり

$$\frac{A_{n-1}A_n}{A_nA_1}\cdot\frac{A_1A'_n}{A'_nA'_{n-1}}\cdot\frac{A'_{n-1}O}{OA_{n-1}}=1$$

から証明される．

(2) 略（n が奇数のときも同様にして証明される）

[5] 線束の第2定理を証明する（図3）

【証明】 $\triangle OA_1A'_3$ において $R_1{}^3=1$ から

$$\frac{A_1A'_2}{A'_2A'_3}\cdot\frac{A'_3O}{OA_3}\cdot\frac{A_3A_2}{A_2A_1}=1$$

$\triangle OA'_3A'_5$ において $R_2{}^4=1$ から

$$\frac{A'_3A'_4}{A'_4A'_5}\cdot\frac{A'_5O}{OA_5}\cdot\frac{A_5A_4}{A_4A_3}\cdot\frac{A_3O}{OA'_3}=1$$

同様にして $\dfrac{A'_5A'_6}{A'_6A'_7}\cdot\dfrac{A'_7O}{OA_7}\cdot\dfrac{A_7A_6}{A_6A_5}\cdot\dfrac{A_5O}{OA'_5}=1$

………

$$\frac{A'_{n-4}A'_{n-3}}{A'_{n-3}A'_{n-2}}\cdot\frac{A'_{n-2}O}{OA_{n-2}}\cdot\frac{A_{n-2}A_{n-3}}{A_{n-3}A_{n-4}}\cdot\frac{A_{n-4}O}{OA'_{n-4}}=1$$

$R_1{}^3=1$ から

$$\frac{A'_{n-2}A'_{n-1}}{A'_{n-1}A_n}\cdot\frac{A_nA_{n-1}}{A_{n-1}A_{n-2}}\cdot\frac{A_{n-2}O}{OA'_{n-2}}=1$$

辺々掛けて，整理すると

$$\frac{A_1A'_2}{A'_2A'_3}\cdot\frac{A'_3A'_4}{A'_4A'_5}\cdot\cdots\cdots\frac{A'_{n-2}A'_{n-1}}{A'_{n-1}A_n}$$

$$=\frac{A_1A_2}{A_2A_3}\cdot\frac{A_3A_4}{A_4A_5}\cdot\cdots\cdots\frac{A_{n-2}A_{n-1}}{A_{n-1}A_n}$$

よって証明された．

9．$R_0{}^3=1$ の拡張定理

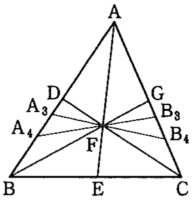
線束の定理とともに応用される重要な定理である．

$$\frac{AD}{DA_3}\cdot\frac{A_3A_4}{A_4B}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CB_4}{B_4B_3}\cdot\frac{B_3G}{GA}=1 \quad\cdots\cdots\text{(a)}$$

［一般化も可能である］

【証明】 $\triangle AA_4B_4$ で

$R_4{}^4=1$ から



$$\frac{A_3A_4}{A_4A}\cdot\frac{AB_4}{B_4B_3}\cdot\frac{B_3A_4}{A_4F}\cdot\frac{FB_4}{B_4A_3}=1 \quad\cdots\cdots ①$$

$R_1{}^3=1$ から $\dfrac{AA_4}{A_4B}\cdot\dfrac{BF}{FG}\cdot\dfrac{GB_3}{B_3A}=1$ …… ② また

$R_1{}^3=1$ から $\dfrac{AD}{DA_3}\cdot\dfrac{A_3F}{FB_4}\cdot\dfrac{B_4C}{CA}=1$ …… ③ また

$R_0{}^3=1$ から $\dfrac{BE}{EC}\cdot\dfrac{CG}{GA}\cdot\dfrac{AD}{DB}=1$ …… ④

辺々掛けて

$$\frac{AD}{DA_3}\cdot\frac{A_3A_4}{A_4B}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CB_4}{B_4B_3}\cdot\frac{B_3G}{GA}\cdot\left(\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BF}{FG}\cdot\frac{GC}{CA}\right)$$

$$\times\left(\frac{B_4A}{AB_3}\cdot\frac{B_3A_4}{A_4F}\cdot\frac{FA_3}{A_3B_4}\right)=1$$

$R_1{}^3=1$ と $R_3{}^3=1$ から ［(a)与式の左辺］$=1$ となる．

10．定理の応用

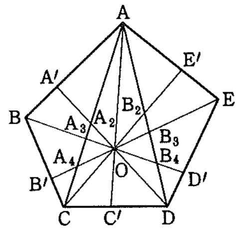
Irisuna の定理を表す三角形に注目したい．

［1］ チェバの定理［五角形］で

$\dfrac{AA'}{A'B}\cdot\dfrac{BB'}{B'C}\cdot\dfrac{CC'}{C'D}\cdot\dfrac{DD'}{D'E}\cdot\dfrac{EE'}{E'A}=1$ …… (a) の証明

$\triangle ABO$ で $R_1{}^3=1$ から

$$\frac{AA'}{A'B}=\frac{AA_2}{A_2A_3}\cdot\frac{A_3O}{OB}$$



同様に $R_1{}^3=1$ から

$$\frac{BB'}{B'C}=\frac{BO}{OA_3}\cdot\frac{A_3A_4}{A_4C}$$

同様に $R_1{}^3=1$ から

$$\frac{DD'}{D'E}=\frac{DB_4}{B_4B_3}\cdot\frac{B_3O}{OE}$$

同様に $R_1{}^3=1$ から $\dfrac{EE'}{E'A}=\dfrac{EO}{OB_3}\cdot\dfrac{B_3B_2}{B_2A}$

よって，辺々掛けて

［(a)の左辺］

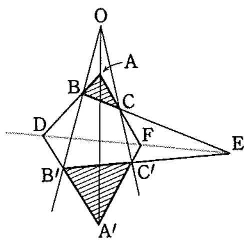
$$=\frac{AA_2}{A_2A_3}\cdot\frac{A_3A_4}{A_4C}\cdot\frac{CC'}{C'D}\cdot\frac{DB_4}{B_4B_3}\cdot\frac{B_3B_2}{B_2A}=1 \quad\cdots\cdots※$$

（∵ 9．の $R_0{}^3=1$ の拡張定理から成り立つ）

（証明終わり）

※については，$\triangle ABC$ と $\triangle ADE$ に線束の第 2 定理を用いると自明になる．なお，$(2n-1)$ 角形でのチェバの定理は，$R_0{}^3=1$ の拡張定理と線束の第 2 定理から簡単に証明される．

［2］ デザルグの定理の証明



2 つの $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ で，2 直線 AB と A′B′，BC と B′C′，CA と C′A′ が，それぞれ D, E, F で交わるとき，3 直線 AA′，BB′，CC′ が，共点であれば，3 点 D, E, F は共線である．

【証明】 Irisuna の定理によると，$R_3{}^3$ から

$\triangle ODA'$ で $\dfrac{AD}{DB}\cdot\dfrac{BB'}{B'O}\cdot\dfrac{OA'}{A'A}=1$ …… ①

$\triangle OB'E$ で $\dfrac{BE}{EC}\cdot\dfrac{CC'}{C'O}\cdot\dfrac{OB'}{B'B}=1$ …… ②

$\triangle OA'F$ で $\dfrac{CF}{FA}\cdot\dfrac{AA'}{A'O}\cdot\dfrac{OC'}{C'C}=1$ …… ③

辺々掛けて $\dfrac{AD}{DB}\cdot\dfrac{BE}{EC}\cdot\dfrac{CF}{FA}=1$ …… ④

④は $R_3{}^3=1$ であるから返り点の3点D，E，Fは共線である（Irisunaの定理の共線がある）．

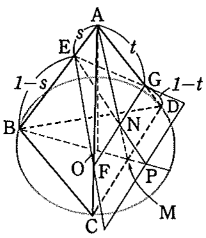
［3］　大学入試問題を解く．

(問題)　正四面体の4つの頂点をA，B，C，Dとする．s，t を $0<s<1$，$0<t<1$ を満たす実数とし，線分ABを $s:(1-s)$ に内分する点をE，線分ACを $t:(1-t)$ に内分する点をF，線分ADを $t:(1-t)$ に内分する点をGとおく．3点E，F，Gを通る平面が，3点B，C，Dを通る円と共有点をもつために s，t の満たすべき条件を求め，点 $(s,\ t)$ の範囲を平面上に図示せよ．（'94 京都大）

【解】　△BCDの重心をO，CDの中点M，平面EFGと直線BM，AMの交点をP，Nとする．点NはAMとFGの交点で FG∥CD であるから $AN:NM=t:(1-t)$

$BM:MP=3:x$ とおくと

$0\leqq x\leqq 1$　……①



△ABPでIrisunaの定理で $R_1{}^3=1$ から

$$\frac{3+x}{x}=\frac{1-s}{s}\cdot\frac{t}{1-t}$$

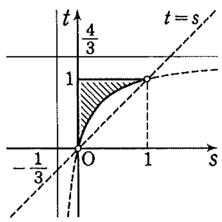
整理して $x=\dfrac{3s(1-t)}{t-s}$

①から $x>0$ と $s>0$，$1-t>0$ であるから

$t>s$ …… ②　$x\leqq 1$ と②から $3s(1-t)\leqq t-s$

$s>0$ であるから $t\geqq\dfrac{4s}{3s+1}$ …… ③

②，③と $0<s<1$，$0<t<1$ から点 $(s,\ t)$ の範囲は右図の斜線部分で境界は $t=\dfrac{4s}{3s+1}$ 上の実線のみ含む．



11．Irisunaの定理の有効性について

［1］　メネラウスの定理，チェバの定理には変化が多く，使い方が簡単でないところがある．その点，本定理はメネラウスの定理，チェバの定理を含んでいるので，運用が簡単で覚えやすいと考えられる．特に，比の計算では有効である．

［2］　メネラウスの定理，チェバの定理の証明には平行線を用いる証明が多いが，球面，曲面では困ってしまう．本定理の証明では平行線は用いず，$R_3{}^3\to R_2{}^3\to R_1{}^3\to R_0{}^3$ というように式変形から主に証明してある．この方法は球面へも発展させることができる．

［3］　実際の指導例では，メネラウスの定理，チェバの定理を勉強したあと，本定理を学ぶと効果的である．つまり，R^4，R^5，R^6 は応用問題となり，そのあと，本定理を学ぶことによって拡張の意義，考え方，証明のテクニック等を学ぶことになり，本定理が有効に働くことになる．

［4］　本定理は多様な展開例が導き出されるので，発展的定理と考えられ意義のあるものと思われる（このことについては今後の発表によって明らかにしていきたい）．

12．今後の課題

今までにもIrisunaの定理を発表して，オリジナルなものか否かについて，専門家および関係者の意見を求めてきましたが，本稿における定理についても検討頂ければ幸いです．なお，Irisunaの定理および第2定理から発展させて得たいくつかの定理や，球面や多面体におけるIrisunaの定理を研究しているので，別の機会にぜひ発表したい．また，Irisunaの定理の有効性についても，更に検証したいと考えております．特に教育の現場にどのように具現化するかが，今後の大きな課題の1つであります．

（愛知県立　一宮興道高等学校）

参考文献

1) 岩田至康編；幾何学大辞典　槙書店
2) 清宮俊雄著；モノグラフ幾何学―発見的研究法―　科学新興社
3) 入砂七五三一；“メネラウス・チェバの定理の拡張について”数研通信 19 号　数研出版（1994．5）
4) 入砂七五三一；メネラウスの定理・チェバの定理を含む定理について―Irisunaの定理―　日数教学会誌第76巻臨時増刊，日数教三重大会提案資料（1994．8）