第5回　日本数学コンクールを終えて

四方(しかた)　義啓(よしひろ)

「何だこりゃあ，これのどこが数学だ」といわれ続けている数学コンクールですが，その一方では，「面白かった，これで数学に対する見方が変わった」という多くの意見に支えられて，今回で第５回を迎えることができました．御理解・御支援下さった方々に心から御礼申し上げます．

第５回といえば，酔っ払った勢いで「やってしまった」第１回コンクールからもう４年になるわけですから，第１回コンクールに参加してくれた人たちは，もうそろそろ大学院に入るなり，就職を考えるなり，人生の何らかの選択を行い始める頃でしょう．そのとき「すべてに通じる数学のパワーと魅力」が，少しでもいい影響を与えていてくれたらと祈りたいような気持ちです．

これまでは「西欧先進諸国に追いつけ，追い越せ」とわき目も振らずに走ってさえいればよかった日本も，これからは，「どちらへ行くのか，そしてどうするのか」という，自分自身による選択を迫られる時代なのです．実は，このコンクールの底には，その選択肢の重さを測り，選択の指標を与えるのは数学の役目にほかならないのだという信念のようなものが流れているのです．

「ほんとうにそんなことが数学にできるのか」とか，同様にして「このコンクールのどこが数学だ」と反論する感覚が間違っているとは決していいませんが，それが「これぞ数学，よくぞ数学」に変わるまでには，それなりの人生の修行と場とが必要だと思います．とにかく，数学の重さは数式の計算や大学受験のテクニックだけに終わるものではないのです．

コンクールの問題は，１つ１つがその重さをもつように作ったつもりです．ですから，たいていの問題は現在の数学・科学では解けていない部分も含んでいて，それに完全な解答ができれば，すぐにでも一人前の数学者・科学者としてやっていける程なのです．

だからといってコンクールの問題が「とりつくしまもない」難問ばかりだとは思わないで下さい．柔らかい頭で見れば，実際の生活，現実はほとんど全てが現在の数学・科学では解明しきれていない謎に包まれているのです．そして，数学こそは真っ向からその謎に挑戦できる学問であるはずなのです．

数学コンクールは，そんな実際の生活の中の謎を参加者の目の前に提示することをねらっています．そこでコンクールの問題は，どの問題もある意味では答すらない，「これが数学かといわれ続ける」超難問になってしまい，その上，問題文の中に現実を表現しようとしたり，その考え方をガイドしようとしたりして，「問題文が長すぎる」，「問題の意味が分からない」ということにもなるのです．

ですが，現実の生活に含まれる謎やその意味を読み解くことができて，そして，これまでに習い覚えた数学の手法を使ってそれを自分なりに料理して見せることができて，それで初めて，本当に未来を生きることができるのではないのでしょうか．

そこで，今回のコンクールも，これまでと同じく，問２では粘土細工，問３では漢字想起，問４ではシャボン玉，問５では補助線といった具合に，ごく身近に存在する謎，それもほとんどが未解決の謎に題材をとりました．ただ今回は，粘土細工やシャボン玉については会場にもこれらの道具を準備して，コンクール中にも実物に手を触れながら問題点を考えられるようにしておいた点が新傾向といえばいえます．

この中で「いわゆる受験数学」に最も近いのは問５でしょう．これは一方では問４のヒントになるように，また一方では「ユークリッド幾何は補助線の勝負」「補助線１本天国•地獄」ともいわれる，補助線の謎に迫れるように作ったつもりです．ユークリッド幾何学の難問を解いたことがある人なら，１度や２度は補助線を思いつけなくてイライラして，(答を見た後で？)「一体なぜこの補助線だろう，ど

うやってこの補助線を思いついたのだろう」と考えたことがあるだろうから，この最小和の問題を知っている人にはちょっと贔屓になったかなと心配したくらいでした．

この問題は，各頂点からの距離の和の最小値を，例えば正弦定理，余弦定理などを使って計算して見せて，「それを幾何学的に実現しようとしたら，問題にいうような補助線を引くのが最も手っ取り早いのだ」というのが一番だと思っていたのです．

ところが，たいていの人はこの問題を「この補助線を使ってとにかく証明すればいい，この補助線が証明のための十分条件であることを示せばいい」と読んだらしく，こちらのねらいは完全に外され，贔屓かななどという心配は全く無駄になりました．求めていたのは「それがどうしてかを疑うこと」「この補助線がなぜ必要なのかを考えること」だったのです．やはり問題文が長くなってもこの辺をよく説明する必要があったのかもしれません．

その前においた問4は，問5のような幾何学が実際の場面で現れることを確認してもらうための問題です．この問題自身ではシャボン玉を取り扱っていますが，六角模様はコンクリートのヒビや蜂の巣などほうぼうに現れるのです．それが「どうして」と疑うことができるなら，この問題も楽しんでいただけたと思っています．この問題の1つの考え方は，もしシャボン玉の大きさが揃うならば，問4を利用して，六角模様には持ち込めることをまず注意して，それから，「ではなぜ揃う」のかという点に集中することだったでしょう．これは，シャボン玉の「壊れやすさ」とでもいうべき量を導入することができたなら，以前は「線形計画法」として高校(？)で教えていた多変量の最大問題に帰着できるのです．

残る3問も結局は同じ思想で作っています．フツーに生活していても，その中にとてつもなく深い謎が隠れているのですから，それを見抜いて，そして「なぜだろう」「なんとかしてやろう」「数学はそのための最高の武器なのだ(!?)」と考えていただきたかったのです．

例えば，問3では，漢字を思い出すにあたっての脳の働きの謎を主題にしています．フツーに暮らしていて「どうやって日本人は2000から4000もの漢字を覚えることができるのだろう」と考えたことはありませんか．それに迫るために，学問・研究があり，実験があるのです．実験といっても，その全てが複雑だったり，お金がかかったりする訳ではありません．この問題で出したような実験自身ならば誰かと組めば容易に行えると思いませんか．要はその中に真理をどうして見つけるかという数学的センスなのです．というわけで参加者も(こっそり2人で組んで？)漢字を思い出す実験を行うかもしれないなあと暗に心配・期待(？)していたのです．粘土を丸める問2にしても同じで，実際に粘土で遊んで，うっかりすると，ロータリーエンジン(のシリンダー)，または「おむすび型(ルーローの定幅曲線)」が現れることを見抜いて，それをなくするにはどうするかを考えて欲しかったのです．そうすれば，どうしても「円とは何か(微分とは何か)」を考え，ついでに「押し潰すということは数学で表現できるか」という最先端の数学を考えることになったはずなのです．問1についても同様です．単なる論理構造としては「exclusive or」をスイッチ回路で実現せよというだけの問題なのですが，本物のエレベーターにも触れてみて，それがフリップフロップ，一種のメモリー，を使わないとどうしようもないほど複雑になることを見て欲しいなと思っていました．ここにコンピュータの基礎があったのです．

この説明からも分かってもらえるとおり，このコンクールでは普通の意味の問題の答などはないものと思って下さい．もちろん，出題にあたって，一応は準備してあるのですが，未来に向かっていこうとする諸君にとって，それだけが答であるはずはありません．たとえその意味は分かりにくくても，チャチな通り一遍の答しかないような問題を出すつもりはないのです．上に示した答らしいものは，我々としては，最善を尽くしたつもりなのですが，ただ1つの考え方に過ぎないのです．

とにかく数学コンクールも何だか回を重ねるごとに質が，というか熱気が上がっていくような気がしてなりません．いずれにせよ，答にたどり着こうがつくまいが，それに取り組んでいくというそのこと自身が，そしてその若い力が現実と抽象の世界との間に立って，未来の数理理論を創り，それによって21世紀を支えていくことは間違いないのです．

第5回　日本数学コンクール 問題と解説

問題　1「天国と地獄の別れ道に，必ず事実と逆のことをいう番人か，本当のことをいう番人かのどちらかが立っている．これに1回だけ質問してどちらが天国への道か知るにはどうするか」というクイズを知りませんか．答はどちらかの道をさして「君が，これは天国への道だと言ったとしたらそれは正しいか」と質問するのです．これは論理学の問題なのですが，1階からも2階からも同じ1つの電球を自由に点滅できる電気スイッチはこれと同じ原理で作られています．どこが同じか分かりますか．では，1，2，3階の各階から同じ1つの電球を自由に点滅できる電気スイッチは作れるでしょうか．それはどんな配線そして論理学になるでしょう．

これを応用してエレベーターの設計はできますか．まず簡単のために建物は2階，エレベーターのモーターは上り専用と下り専用の2つがあって，それぞれ上りきったとき，下りきったときに止まるものとしましょう．ついでに3階の建物だったらどうですか．

これは電流の「入・切」を「イエス・ノー」で表して，天国と地獄のクイズに結び付けるというのが第一のポイントでした．「もし君がこの道を……イエスといったとしたら…」という文章は，「もし，この線を通って電気が流れていれば…」に対応します．これからすぐに，2階建ての場合の自由点滅の配線図にいってもいいのですが，「イエス・ノー」を「イチ・ゼロ」または，「プラスイチ・マイナスイチ」に置き換えて，1階のスイッチの位置と2階のスイッチの位置との(論理)表を作ってみるのが次のポイントになるでしょう．こうしてみると，論理積(または排他的論理和，exclusive or)との対応の状況がハッキリと把握できます．これだけでも，既にかなりの数学になるわけです．ここまでいっていれば，3階のときにどうするかは，理論的には明らかですから，実際の配線図がかけなくても「なかなかいいな」ということになったわけです．もちろん，論理図なしに配線図をきちんとかいてくれた人もかなりありました．いずれにしても，スイッチによって，現在の状態を逆にできる，すなわち，現在「入」だったら，どのスイッチを倒しても，「切」にできる，また現在「切」だったら「入」にできる，ということが最重要ポイントです．そのために，連動スイッチなど，多少特殊なものを使用しなければなりませんが，この辺からエレベーターの配線までを試行錯誤を混えながら(証明なしにでも)，何とかこなした人たちを評価しました．

なお，これを数学的に一歩進めるためには「入・切」を，「イチ・ゼロ」で表現すると便利です．ただし，ゼロ・プラス・ゼロはゼロ，ゼロ・プラス・イチはイチ，そして，イチ・プラス・イチはゼロ，というへんてこりんな足し算を知っているものとするのです．すると，現在の状態が変数xで表されているとき，スイッチを倒して得られる次の状態はそれにイチを加えることで表されます：

(次の状態変数)=(現在の状態変数)$+1=x+1$

というわけです．そして，上のへんてこりんな足し算の世界が実は奇数・偶数の世界だと気がついてしまえば(これに気がつけるなら「マイナスイチを掛ける」でもよい，とにかくこれを思いつくのは素晴らしい)，評価を行っていただいた高原先生も指摘されるように，これはまさに，2回押したら元に戻る180度回転スイッチ，フリップ・フロップの世界です．これが，イチを加えるまで，現在の状態を記憶する，すなわち，(エレベーターにも使用されている)コンピュータのメモリーなのですよ．

問題　2　みんなも一度は粘土遊びをしたことがあるでしょう．そのとき，丸いお団子をどうやって作ったか思い出せますか．実は，それが数学的に正しい方法だったかどうかを考えてみてほしいのです．肩慣らしに，円柱形に作るのならどうかなと考えてみて下さい．これは粘土を平行な板の間に挟んで板をまっすぐ転がせばいいのですが，なぜでしょうね．それなら，丸くするのはどうでしょう．それ以外の形は作れませんか．

これが解けちゃったという人のために応用問題を出してみましょう：ボロ博士のお友達は，昔，富山の薬屋さんが板と板の間に練り薬を挟んでクルリと回すと，5ミリくらいの大きさの球(丸薬)がいくつもいくつもできているのを見たというのですが，なぜでしょう．ひとつ種明かしを考えてみて下さい．

板と板との間隔を一定にしておいて一定方向に動かすという円柱ができるはずの場合でも，板を円(ほんとうはいろいろな曲線)を描くように動かして球になるはずの場合でも，まず評価したのは，それ以外の形が混じり込む可能性を指摘できた人達です．

ルーローの定幅曲線として，またロータリーエンジンのピストンの形(の原型)としても知られる「おむすび型」は，どの方向にも一定の幅を持っています．

ですから，いくら板と板との間隔を一定にしておいて，一定方向に動かしたからといっても，「断面が必ず円である，したがって，円柱ができる」，と主張はできないのです．同様のことは，板を円を描くように動かした場合にも起こります．この場合は，ソロバン玉のような形が混じり込みます．

両方ともあらかじめ知っていたのでなければ，これを書いた人はその場で実際に粘土をこねながら見つけたはずで，ほんとうに見事な観察だと思いました．でも，もう少し多くの人が，例えば，消しゴム型ができるとか，粘りがあるなら回転不変だろうなど，いろいろなことを書いてくれることを期待はしていたのです．

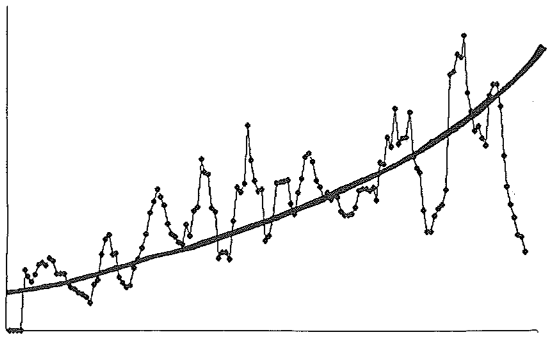
本来は，板をいろいろに動かして，いわば不純物を捨てるような考え方で円または球へと追い詰めていくわけですが，ここを「数学的に」発想できた人は残念ながらうんと少なくなります．もちろん，全体解説でも書いたように，(ボロ博士が知る限りでは)これを純粋に抽象的に行うには，現在のところ超高度な数学技術を必要とするので，中・高生の諸君には無理なことは分かっていたつもりです．でも，粘土を実際に触ってみると，ある程度の感覚が得られるのではないかと考えていました．実はそれを抽象の世界で式に書いたものが変分法なのです．ですから，「板を押さえるのだから，凸凹がない方がいい，したがって，おむすび型は除かれる」，「(理由ははっきりしないけれど)円または球の方が最大体積を占めるからいい」と答えた人の感覚は光っていると思います．これらが変分法では微分を抑えるといわれている技法で，実際の粘土の場合はその性質から自然に出てくるものなのです．

更に，球の場合の板の動かし方に触れて，ソロバン玉のような不純物を除くためには，「(可能かどうかはともかくとして)板をできるだけランダムに動かせばよい」は素晴らしいと思いました．適当な物理的条件が満たされているときにはこれが多分ほんとうの答(の素)なのです．

問題 3 ボロ博士は，心理学の先生に教わって日本人はどうやって漢字を思い出すのかという問題を考えています．

ここに，ある学生さんに，漢字を自由に思い出して書いてもらった実験の記録があります．漢字の表と数字の表とが並んでいますが，漢字の表は思い出された漢字をその順番に並べたもの，数字の表は漢字を思い出すのにかかった時間を示しています．これをグラフにすると後になるにつれてだんだん漢字が思い出しにくくなっていく様子が分かります(ただし，ここで示したグラフは移動平均という方法で少し見やすくしてあります)．

さて，250 の引き出しのうちの 200 の引き出しに隠してある宝石を見つけるゲームを考えましょう．ただし，1 度に開けられる引き出しは 1 つでそれには 4 秒かかる，毎回デタラメに引き出しを開ける，また見つけた宝石は取り除いて，引き出しは元通りに閉める，としましょう．すると，最初は 250 分の 200 の確率ですから平均発見時間は $4\times\frac{250}{200}=5$ 秒 くらいです．ところが，後になって宝石の入っている引き出しの数が少なくなると宝石は見つけにくくなって平均発見時間は長くなるでしょう．これは頭の中で漢字を探すプロセスに似ていないでしょうか．このゲームの平均発見時間のグラフを図に示しますが，漢字の場合と違っているでしょうか，それとも似ているといえるでしょうか，どちらにしてもそれはなぜでしょう．



貢 3.32	晴 3.27	者 7.14	圧 3.95	動 3.20	耳 1.96	酒 3.60	水 1.32	二 1.06	東 0.00
緑 3.69	均 5.02	我 2.80	倒 2.79	物 2.20	口 1.24	夢 3.06	木 0.90	三 0.85	西 2.00
灰 2.23	持 16.24	炎 7.64	岐 2.56	植 3.03	唱 6.47	死 1.72	金 1.83	四 1.11	南 2.05
街 4.10	侍 3.95	鳥 3.03	阜 2.60	狂 1.86	検 5.00	七 0.94	土 0.55	五 1.20	北 1.26
町 2.15	捨 5.28	島 2.82	知 2.29	獣 4.04	冒 2.25	香 3.68	日 0.94	六 0.80	上 1.32
村 1.74	拾 2.84	司 7.27	徳 4.13	踏 5.74	険 2.94	車 2.17	星 3.40	七 0.64	下 0.86
市 1.46	敗 7.78	竹 5.84	伊 3.57	愛 3.95	皆 8.25	歩 6.14	太 2.06	八 0.67	左 1.14
長 2.05	白 9.15	内 2.26	藤 4.59	様 5.63	怪 2.32	兵 2.22	陽 3.20	九 0.73	右 1.42
短 2.31	中 1.67	外 1.65	勝 2.78	卒 2.35	小 2.51	伴 6.69	道 2.22	十 0.56	前 2.13
	紅 2.93	記 2.25	野 2.31	業 3.00	大 1.04	青 2.04	路 3.58	参 3.09	後 2.58
	竜 3.34	紀 2.77	利 3.87	怖 3.40	朝 3.09	休 2.01	銀 4.76	上 1.16	山 1.08
	玄 6.35	寄 3.20	球 3.98	恐 3.22	夜 2.04	止 2.02	桂 3.46	優 3.84	川 0.83
	色 8.29	生 2.33	庭 3.02	必 4.21	痕 2.89	足 1.78	馬 2.38	惑 2.55	海 2.27
	發 7.74	岩 3.59	羅 7.31	勝 3.10	病 4.66	手 1.02	王 1.18	月 1.07	空 1.77
	緑 4.28	明 3.08	武 2.13	負 2.25	人 5.32	目 2.77	玉 1.25	火 0.71	一 1.05

横軸には，それまでに書いた漢字の文字数，縦軸には，その文字の5文字前を書き終わってからその文字を書き終わるまでにかかった時間をとりました．例えば，横軸の10番目の点を見ると，縦軸には，5番目の文字を書き終わってから10番目の文字を書き終わるまでにかかった時間があらわれます．

このように，ある点の前後を足し合わせて平均をとり，なめらかにしてグラフを見やすくすることを，移動平均法といいます．

なお，図中の曲線は宝石の平均発見時間のグラフです．

右の表は，1つ前の文字を書き終わってからその文字を書き終わるまでにかかった時間を表にしたものです．

この問題はちょっと身近すぎたのかもしれません．「悪くはないな」という評価はしましたが，多くの人が，いきなり『「一の次に二，そして三…」また，「上の次に下」というように漢字が思い出されているから，漢字は塊として，頭の中に入っているはずだ』とやっていました．「だから，実験データの凸凹が説明できて，宝石捜しゲームのグラフが近似できる」というわけです．でもこれは，何だか論理の向きが逆だと思いませんか．ボロ博士が欲しかったのは，この実験のグラフ・データから，なぜそのように結論できるかという方向での，「数学的な」説明だったのです．

ついでに付け加えると，全体説明でも書いたように実験をしてみるという姿勢にも問題があったかと思います．コインを投げる問題などでもそうでしょうが，確率$\frac{1}{2}$とは習っていても，実験してみれば，表の次に必ず裏がくるとは限らず，何回も続けて表または裏が出るといったことがありがちです．

これに気が付いていれば，データのグラフの凸凹はあたりまえで，むしろない方が不思議ということになります．面白いのは，評価にあたっていただいた丹羽先生の指摘の通り，その凸凹のでき方だったのです．なんとなくですが，最初のうちは凸凹が小さくて，後になると凸凹が大きくなるように見えませんか．

実は，確率論のプロからみるとここが要点だったのです．すなわち，ただコインを投げるなら，これは全く一様な確率的な現象で，どこで考えても凸凹のでき方は同じはずです．これをホワイトノイズといいますから，どこかで聞かれた方もいるでしょう．

そうすると，凸凹の様子が異なっている漢字のデータは，コインを投げるような一様な確率的な現象だとはいえなくなってくるでしょう．少なくとも，それになんらかの操作が施されたものであるとはいえそうです．

ここまでくると，ボロ博士のいうように，「コインを投げた確率」を「引き出しに宝石が入っている確率」と置き換えて，後はどんなパラメーターが，データを近似するかと考えるのも頭の中のモデルを考える1つの行き方にはなります．

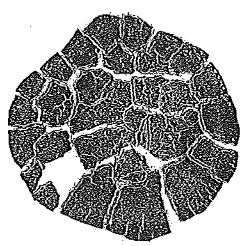
でも，それはあくまで1つの可能性であって，「頭の中はこうでなければならない(必要条件)」という強いモデルからはまだまだ遠いものです．

この問題では，無理を承知で，ほんとうの強いモデルを得るためにはこの上にどんな実験が必要かとも聞いていたのですよ．

問題　4　今日はシャボン玉で遊びましょう．用意した2枚の透明な板の間に20個くらいのシャボン玉を吹き込んでみて下さい．そして，シャボンの膜がどんな条件のときに，どんな模様になるかを観察して，それがなぜかを解き明かしてほしいのです．

もし，同じ大きさのシャボン玉を吹き込んだとしたら，蜂の巣模様が見えるはずなのですが，それはなぜでしょう．こんなの数学じゃないという人のために次の5番が用意してあります．そうでない人に対してもヒントになるかもしれませんから参照して下さい．

これとは別に，水で練ったメリケン粉を乾かしてできたひび割れの写真を示しておきます．この場合はなぜきれいな蜂の巣模様にはならないのでしょう．ひとつ考えてみて下さい．



評価した答案は，シャボン玉がなぜ多角形になるかを説明して，次に，同じ多角形が平面を埋め尽くすとしたら，それは三角形，四角形，六角形のうちのどれかでしかないと論じ，そして，周の長さと面積との関係に注意して，六角形の蜂の巣だと結論するものでした．もちろん，この一部がなくても，逆に，一部だけが非常によいセンスを持っていたものも評価の対象になりました．例えば，周の長さと面積との関係からパッキングの問題，すなわち，空間や平面を球で埋め尽くす問題にまで言及しているものなどです．

ただ，例えば，同じ大きさのシャボン玉が揃いたがるなどの観察が余りなされていなかったのが気になりました．あくまでバーチャルな世界に生きるなら，すなわち，頭の中だけで理論的・抽象的に考えるならこれでもいいのかもしれませんが，せっかくシャボン玉の道具を出しておいたのですから，もう少し遊んで欲しかったなあ，実験不足だなあという感じは強く持っています．例えば，条件の悪いときにはシャボン玉がつぶれるという事実などには誰も触れていないのです．実は，これがあって初めてシャボン玉が同じ大きさにそろって，蜂の巣が作れるのだとは思いませんか．そして，もし，どのようなものがつぶれやすいかにもう少し注意を払っていれば，「つぶれやすさ」というようなものを１つのパラメーターに取る，そうして「なぜ揃いたがるかを数学にする」という考え方が出てきたかもしれないのにと思うのです．

そうとなったら，シャボン玉は半径の大きいほうがつぶれやすい，だから，半径をつぶれやすさの指標にしよう，一方，半径 x，y，……の(ガラス板に挟まれた)シャボン玉が面積 S の平面を満たすなら，だいたい

$$S=x^2+y^2+\cdots\cdots \tag{1}$$

一方，

$$「つぶれやすさ」=\max(x,\ y,\ \cdots\cdots) \tag{2}$$

と表されるとしてよいだろう．すると，安定なシャボン玉模様においては「つぶれやすさ」は最小に保たれるだろう，すなわち，自然は式(1)の条件における式(2)の最小問題を解いてシャボン玉模様を作っているだろう，ということになります．これを解くのは，線形計画問題などでお得意ですね．答は

$$x=y=\cdots\cdots$$

です．

こうしてシャボン玉模様は揃った大きさをもちたがるのだと説明できるのではないでしょうか．

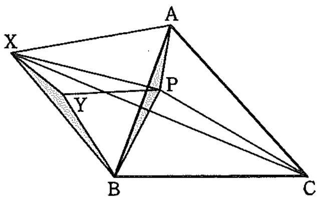
問題　5　幾何学の問題「３点Ａ，Ｂ，Ｃと同じ平面上に点Ｐをとる．これら３点Ａ，Ｂ，Ｃから点Ｐまでの距離 AP，BP，CP の和 AP＋BP＋CP を最小にせよ」を考えましょう．これは見事な補助線を使って解くことができます．AB，BP をそれぞれ１辺とする正三角形 △ABX，△BPY を考えるのです．

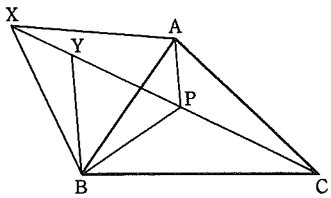
すると AP＋BP＋CP は XY＋YP＋PC に等しくなって，これが直線のときに最小，だから，

$$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$$

のときが最小という答がでます．図も参照して下さい．

さて，コンクールの問題はこれからです．なぜ，この補助線でこの問題がうまく解けたのでしょう，ほかの補助線では解けないものでしょうか．





☆誌面の都合上，問題５の解説は省きました．　（名古屋大学）