惑星の軌道について

坂本　茂

1　惑星の運動

万有引力の法則と**運動の法則**とから惑星の運動の法則を導こう．ある天体がある時刻に位置 $\overrightarrow{r_0}$ のところを速度 $\overrightarrow{v_0}$ で動いていたとすると，この天体は $\overrightarrow{r_0}$，$\overrightarrow{v_0}$ と太陽のつくる平面内で運動することになる．なぜならこの平面には垂直方向の力が働かないからである．

太陽の質量M，天体の質量m，太陽を原点とする天体の位置ベクトル $\overrightarrow{r_0}$ とすれば，運動の法則より $\overrightarrow{F}=m\overrightarrow{r''}$，万有引力の法則より $\overrightarrow{F}=\dfrac{GMm}{r^2}\left(-\dfrac{\overrightarrow{r}}{r}\right)$ である．ただし $r=|\overrightarrow{r}|$，$\overrightarrow{r'}=\dfrac{d\overrightarrow{r}}{dt}$，$t$ は時間である．この2つの法則から

$$\overrightarrow{r''}+\mu\frac{1}{r^3}\overrightarrow{r}=0 \qquad ①$$

となり，これを満たして天体mは運動する．ここで $\mu=GM$，Gは万有引力定数である．この微分方程式を解くことを考える．$\overrightarrow{r}=(x,\ y)$ とすれば①で成分 x，y のそれぞれの式は

$$x''+\mu r^{-3}x=0,\quad y''+\mu r^{-3}y=0 \qquad ②$$

となる．②のそれぞれに x，y を掛けて引けば

$$xy''-x''y=0 \qquad ③$$

であり，部分積分により

$$xy'-\int x'y'dt-x'y+\int x'y'dt=0$$

となるから，b を定数として次の式を得る．

$$xy'-x'y=b \qquad ④$$

また，②のそれぞれに x'，y' を掛けて加えれば

$$x''x'+y''y'+\mu r^{-3}(xx'+yy')=0 \qquad ⑤$$

となる．ここで

$$\int x''x'dt=x'x'-\int x'x''dt$$

$$\int x''x'dt=\frac{1}{2}x'^2+c_1$$

であり，同様に

$$\int y''y'dt=\frac{1}{2}y'^2+c_2$$

である．$r^2=x^2+y^2$ を微分して $rr'=xx'+yy'$ で

$$\int(x'x+yy')r^{-3}dt=\int r'r^{-2}dt=\int r^{-2}dr=-\frac{1}{r}+c_3$$

したがって，⑤を積分すると，c を定数として，

$$x'^2+y'^2-2\frac{\mu}{r}=c \qquad ⑥$$

となる．結局①から④，⑥式が導かれた．

2　導かれた2つの法則

最初に⑥式を考える．天体mの万有引力 $F=\mu mr^{-2}$ による r での**位置エネルギーU**は

$$U=-\int_r^\infty Fdr=\left[\frac{\mu m}{r}\right]_r^\infty=-\frac{\mu m}{r}$$

である．また天体の速度 v とすると $v^2=x'^2+y'^2$ であり，**運動エネルギー**は $\dfrac{1}{2}mv^2$ である．

したがって，⑥は

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{r}\mu m=\frac{1}{2}mc \quad (一定) \qquad ⑦$$

となる．これは**エネルギー保存の法則**である．

次に極座標を考えて，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ とすると④式は

$$r\cos\theta(r'\sin\theta+r\,\theta'\cos\theta)$$
$$-(r'\cos\theta-r\,\theta'\sin\theta)r\sin\theta=b$$

であるから $r^2\theta'=b$ となり

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=b \qquad ⑧$$

である．ベクトル $\overrightarrow{r}$ が描く面積をSとすると

$$dS=\frac{1}{2}r(rd\theta)=\frac{1}{2}r^2d\theta$$

であるから $\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{dS}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{b}{2}$ (一定)．すなわち⑧は面積角度が一定であることを示し，**ケプラーの第二法則**を表しているのである．

④はケプラーの第二，⑥はエネルギー保存の法則

であることがわかった.

⑥式は v^2 を極座標に表すことにより

$$(r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta)^2+(r'\sin\theta+r\theta'\cos\theta)^2-2\frac{\mu}{r}$$

$$=r'^2+r^2\theta'^2-2\frac{\mu}{r}=c$$

となる. ゆえに

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2-2\frac{\mu}{r}=c \qquad ⑨$$

3 惑星の軌道

$b=0$ のときは太陽を含む直線運動である. $b\neq 0$ のときはどうであろうか.

⑧, ⑨式より t を消去する.

$$\left(br^{-2}\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2\frac{b^2}{r^4}-2\frac{\mu}{r}=c$$

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2=cb^{-2}r^4+2\mu b^{-2}r^3-r^2 \qquad ⑩$$

ここで, $cb^{-2}=A$, $\mu b^{-2}=B$ とおくと,

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2=r^2(Ar^2+2Br-1)$$

この式の右辺は常に負であってはならないので, r の2次方程式の判別式は負ではない. よって $D^2=B^2+A\geqq 0$ となる実数 D が存在する. このとき $c\geqq -\mu^2b^{-2}$ である.

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2=r^2\{(D^2-B^2)r^2+2Br-1\}$$

$$=r^4\left\{D^2-\frac{(Br-1)^2}{r^2}\right\}$$

よって, $\dfrac{dr}{d\theta}=\pm r^2\left\{D^2-\left(\dfrac{Br-1}{r}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$ となる.

$\dfrac{Br-1}{r}=D\cos z$ とおくと $\dfrac{dr}{d\theta}=\pm r^2D\sin z$ で

$Br-1=Dr\cos z$ を微分して

$$B\frac{dr}{dz}=D\left(\frac{dr}{dz}\cos z-r\sin z\right)$$

$$\frac{dr}{dz}=\frac{-Dr\sin z}{B-D\cos z}=-Dr^2\sin z$$

よって $\dfrac{dr}{dz}=\pm\dfrac{dr}{d\theta}$ であるから $\dfrac{dz}{d\theta}=\pm 1$ となり $z=\pm\theta+\mathrm{const.}$ である. この余弦は定数 ε を適当に選ぶことにより $\cos z=\cos(\theta+\varepsilon)$ となる.

また $r=\dfrac{1}{B-D\cos z}$ であるから, 求める惑星の方程式は

$$r=\frac{1}{B-D\cos(\theta+\varepsilon)} \qquad ⑪$$

となる. $B=\mu b^{-2}$, $D=(\mu^2+c^2b^2)b^{-4}$ である.

これは原点を1つの焦点とする2次曲線の極座標による方程式である.

したがって, 惑星の軌道は太陽を1つの焦点とする楕円である. これは**ケプラーの第一法則**であって, ケプラーの第二およびエネルギー保存の法則とから導かれたのである. ⑪を

$$r=\frac{l}{1+e\cos\theta} \quad (l>0) \qquad ⑫$$

と書く. ここで $l=\dfrac{b^2}{\mu}$, $e=\left(1+\dfrac{cb^2}{\mu^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\mu=GM$ であり, $\theta+\varepsilon$ を2次曲線の主軸が座標軸となるように改めて θ とおいた.

e は2次曲線の離心率である.

天体が $t=0$ のとき $P_0(x_0,\ y_0)$ のところを速度 $V_0(u_0,\ v_0)$ で動いていたとすると

$$b=x_0v_0-y_0u_0,\quad c=u_0{}^2+v_0{}^2-2\frac{\mu}{r_0},$$

$$r_0=(x_0{}^2+y_0{}^2)^{\frac{1}{2}}$$

より l と e が定まる. またこのとき $\theta=\theta_0$ は

$\cos\theta_0=\dfrac{x_0}{r_0}$, $\sin\theta_0=\dfrac{y_0}{r_0}$ で与えられる.

$b\neq 0$ のときは c の負, 0, 正によって軌道はそれぞれ楕円, 放物線, 双曲線になることが離心率 e の値からわかる.

4 楕円軌道

2次曲線のうち楕円軌道の場合を考えよう. $e<1$ であり, a を楕円の半長径とすると, $l=a(1-e^2)$ と書ける.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{l}{1+e\cos\theta}d\theta=l(1-e^2)^{-1}=a$$

となり a は r の θ に対する平均で, 普通惑星と太陽の平均距離と呼ばれる.

惑星の最大の速さを V_1, 最小の速さを V_2 とすれば

$$b=a(1-e)V_1=a(1+e)V_2$$

$$c=V_1{}^2-\frac{2\mu}{a(1-e)}=V_2{}^2-\frac{2\mu}{a(1+e)}=-\frac{\mu}{a}$$

となり, これより

$$V_1{}^2=\frac{\mu(1+e)}{a(1-e)},\quad V_2{}^2=\frac{\mu(1-e)}{a(1+e)}$$

ケプラーの第二法則は $t>0$ に対し $\theta>0$ とするなら $b>0$ であって $b=r^2\dfrac{d\theta}{dt}=\{a\mu(1-e^2)\}^{\frac{1}{2}}$ である．

T を周期とすると，楕円の面積を考えることによって $T\dfrac{1}{2}r^2\dfrac{d\theta}{dt}=\pi a^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}$

となるから，**ケプラーの第三法則**

$$\frac{a^3}{T^2}=\frac{\mu}{4\pi^2} \qquad ⑬$$

が成り立つ．第一，第二法則から求められたものである．

次に時間 t と**真近点角** θ との関係を求めることが問題となる．楕円

$$r=\frac{l}{1+e\cos\theta},\quad l=a(1-e^2)$$

において $M=wt$ を**平均近点角**といい，$w=\dfrac{2\pi}{T}$ を平均運動という．これを使うと⑬は $a^3w^2=\mu$ と表すことができるから $w=\mu^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{3}{2}}$ である．

$$\begin{aligned} bt&=a^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}M\\ &=\int r^2d\theta=\int\frac{a^2(1-e^2)}{(1+e\cos\theta)^2}d\theta \end{aligned}$$

これを $s=\tan\dfrac{\theta}{2}=\left(\dfrac{1+e}{1-e}\right)^{\frac{1}{2}}\tan\dfrac{E}{2}$ ⑭

とおくことにより積分すると，まず

$$\begin{aligned} M&=(1-e^2)^{\frac{3}{2}}\int\frac{\dfrac{2}{1+s^2}}{\left(1+e\dfrac{1-s^2}{1+s^2}\right)^2}ds\\ &=2\frac{(1-e)^{\frac{3}{2}}}{(1+e)^{\frac{1}{2}}}\int\frac{1+s^2}{\left(1+s^2\dfrac{1-e}{1+e}\right)^2}ds \end{aligned}$$

更に

$$\begin{aligned} M&=(1-e)\int\left(1+\frac{1+e}{1-e}\tan^2\frac{E}{2}\right)\cos^2\frac{E}{2}dE\\ &=(1-e)\int\left(\frac{1+e}{1-e}\sin^2\frac{E}{2}+\cos^2\frac{E}{2}\right)dE \end{aligned}$$

これを計算して**ケプラーの方程式**と呼ばれる

$$M=E-e\sin E \qquad ⑮$$

を得る．E は**離心近点角**と呼ばれ，楕円の中心を原点とする直交座標で楕円を $x=a\cos E$，$y=b\sin E$ と表される．ここで $b=a(1-e^2)^{\frac{1}{2}}$ は半短径であり⑧式の定数ではない．また，楕円の面積

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}r^2d\theta=\frac{1}{2}a^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}[M]_0^{2\pi}=\pi ab$$

が上記の積分で求められている．θ を t で表すことは⑮式で E を M で表すことに帰着するが，簡単な関数で表すことはできない．

以上のほか，放物線，双曲線，直線軌道があるが同様の計算ができる．また電磁場などで斥力が働いて反発するようなときは μ を負とすればよく，このときは双曲線軌道である．

今まで述べてきたことは**二体問題**であり，太陽を原点としたが，天体と太陽の重心を原点とすべきであろう．惑星も太陽も相似形の楕円を描き離心率は同じである．黄道上の太陽の位置を正しく表すには θ を t の式で表さなければならないのである．

ニュートンが確立した力学の中で，ガリレオの物体落下やケプラーの惑星運動の 3 法則を彼自身が発見した微積分の計算により導き出すことは素晴らしいことである．またこの計算は高校の微積分だけで十分である．このほど MKS 単位系に基づく**国際単位系 SI** が公布され，教育現場でもこれに統一されようとしている．例えば家庭科でさえもカロリーはジュールに取って変えられるだろう．その基礎となるものはニュートン力学であり速度，加速度，力の関係を正しく理解し生徒自身のものにしなくてはならない．

（東京都立 鷺宮高等学校）

《参考》 平面上の位置を複素数 $z=x+yi$ で表し，この問題を考えれば $z=re^{i\theta}$ とできて速度，加速度は

$z'=(r'+ir\theta')e^{i\theta}$，$z''=\{(r''-r\theta'^2)+i(2r'\theta'+r\theta'')\}e^{i\theta}$

となる．

万有引力 $F=-\mu mr^{-3}z$，運動法則 $F=mz''$ より $z/\!/z''$ であり $2r'\theta'+r\theta''=0$ である．

これを r 倍して積分し，⑧ $r^2\theta'=b$

一方 $z''=(r''-r\theta'^2)e^{i\theta}$ であり F は

$z''=-\mu r^{-2}e^{i\theta}$ より $r''-r\theta'^2+\mu r^{-2}=0$

これを r' 倍して積分すれば，⑨ $r'^2+r^2\theta'^2-2\mu r^{-1}=c$ を得る．

これは，⑥ $|z'|^2-2\mu r^{-1}=c$ である．