# 一般化したFibonacci数列における隣接項の比とその極限

大木　實（おおき　みのる）

**【主旨】** Fibonacci 数列 $\{a_n\}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ は初期条件 $a_1=0$, $a_2=1$ として漸化式

$$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}\ (n=2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

により定義され，計算の結果 $u_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ の値は $n\longrightarrow\infty$ で $\dfrac{1+5^{\frac{1}{2}}}{2}$ に収束します．

漸化式を一般化し，初期条件を変えたとき $u_n$ を求めその極限を調べ，収束する場合の条件，発散する場合の様子を解明します．ここに，$a_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を複素数の範囲で考えます．

**【問題】** 数列 $\{a_n\}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を $(a_1,\ a_2)\neq(0,\ 0)$, $pk\neq0$, $a_1$, $a_2$, $p$, $k$ は複素数として，漸化式

$$a_{n+1}=pa_n+p^2ka_{n-1}\ (n=2,\ 3,\ \cdots\cdots) \qquad (1)$$

により定義します．$a_n\neq0$ のとき $u_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ とおき，$n\longrightarrow\infty$ のとき $u_n$ の極限値 $L$ を求めます．また，$L$ が発散する場合の $\{a_n\}$，更に $a_n=0$ が無限個ある場合を調べます．

**【解答】**

まず漸化式(1)を満たす $a_n$ を求め，$u_n$ が確定値をもつ条件 $a_n\neq0$ に対応し，

〈i〉 ある $m(\geqq2)$ で $a_m=0$ のとき $u_{n+m-1}$

〈ii〉 $a_1=0$ のとき $u_n$

〈iii〉 $a_n\neq0$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ のとき $u_n$

の各値を $n=2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して考えます．$a_n$ を求めるために 2 次方程式 $t^2-pt-p^2k=0$ の解を $\alpha$, $\beta$ ただし $|\alpha|\geqq|\beta|$ とします．

〔I〕 $\alpha=\beta$ 〔II〕 $\alpha\neq\beta$ の各場合に分けて〈i〉,〈ii〉,〈iii〉の各値を計算し，更に〔II〕を $|\alpha|>|\beta|$, $|\alpha|=|\beta|$ の場合に分けて $L$ を求めます（以上の方針で解答します）．

$\alpha+\beta=p$, $\alpha\beta=-p^2k$ を用いて(1)を次の形に変形します．

$$\left.\begin{aligned}a_{n+1}-\alpha a_n&=\beta(a_n-\alpha a_{n-1})\ (n\geqq2)\\ a_{n+1}-\beta a_n&=\alpha(a_n-\beta a_{n-1})\ (n\geqq2)\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

〔I〕 $\alpha=\beta$ のとき $p^2+4p^2k=0$ から $k=-\dfrac{1}{4}$

ゆえに $a_n$ の漸化式(1)は

$$4a_{n+1}=4pa_n-p^2a_{n-1}\ (n\geqq2) \qquad (3)$$

となり，方程式 $4t^2-4pt+p^2=0$ は重解 $\alpha=\dfrac{p}{2}\neq0$ をもちます．(2)を用いて

$$\begin{aligned}a_{n+1}-\alpha a_n&=\alpha(a_n-\alpha a_{n-1})=\alpha^2(a_{n-1}-\alpha a_{n-2})\\ &=\cdots\cdots=\alpha^{n-1}(a_2-\alpha a_1)\ (n\geqq2)\end{aligned}$$

$$\therefore\ a_{n+1}-\alpha^na_1=n\alpha^{n-1}(a_2-\alpha a_1)$$

$$\therefore\ a_n=\alpha^{n-2}\{(n-1)a_2-(n-2)\alpha a_1\}\ (n\geqq2) \qquad (4)$$

〈i〉 ある自然数 $m(\geqq2)$ が存在して $a_m=0$ となる場合

(4)から $a_2=\left(\dfrac{m-2}{m-1}\right)\alpha a_1\ (m\geqq2)$

$b_n=a_{n+m-1}$ $(m\geqq2,\ n\geqq1)$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ について(3)から

$$4b_{n+1}=4pb_n-p^2b_{n-1}\ (n\geqq2) \qquad (5)$$

が成立します．(5)を解くと(4)と同様な解となり $b_1=0$ を用いて

$b_n=\alpha^{n-2}(n-1)b_2\neq0\ (n\geqq2)$

［∵ $a_m=a_{m+1}=0\Longrightarrow$(1)から $a_1=a_2=0$ となり矛盾します］

$$\therefore\ u_{n+m-1}=\frac{a_{n+m}}{a_{n+m-1}}=\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{1}{1-n^{-1}}\alpha \qquad (m\geqq2,\ n\geqq2)$$

〈ii〉 $a_1=0$ の場合 $a_2\neq0$

(4)から $a_n=(n-1)\alpha^{n-2}a_2\neq0$

$$\therefore\ a_n=\frac{n-1}{n-2}\alpha a_{n-1}\neq0\ (n=3,\ 4,\ \cdots\cdots)$$

$\therefore\ u_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{1-n^{-1}}\alpha\ (n\geqq 2)$

〈iii〉 $a_n\neq 0\ (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ の場合

$a_2=u_1a_1\neq 0$ とおけます．(4)から $u_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ は

$$u_n=\frac{na_2-(n-1)\alpha a_1}{(n-1)a_2-(n-2)\alpha a_1}\alpha$$
$$=\frac{(u_1-(1-n^{-1})\alpha}{(1-n^{-1})u_1-(1-2n^{-1})\alpha}\alpha$$

特に $u_1=\alpha$ のとき $u_n=\alpha\ (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$

$\therefore\ L=\alpha$

〔II〕 $\alpha\neq\beta$ のとき $\dfrac{\beta}{\alpha}=\gamma$ とおくと $\gamma\neq 1,\ \gamma\neq 0$

(2)から

$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)\ (n\geqq 1)$,

$a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1)\ (n\geqq 1)$

$$\therefore\ a_n=\frac{(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})a_2-(\alpha^{n-2}-\beta^{n-2})\alpha\beta a_1}{\alpha-\beta}$$
$$=\frac{\{(1-\gamma^{n-1})a_2-(1-\gamma^{n-2})\beta a_1\}\alpha^{n-2}}{1-r}\ (n\geqq 2) \tag{6}$$

〈 i 〉 ある自然数 $m(\geqq 2)$ が存在して $a_m=0$ となる場合

$$(6)から\ a_2=\frac{1-\gamma^{m-2}}{1-\gamma^{m-1}}\beta a_1\ (m\geqq 2) \tag{7}$$

$b_n=a_{n+m-1}\ (m\geqq 2,\ n\geqq 1)$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ について(1)から

$b_{n+1}=pb_n+p^2kb_{n-1}\ (n\geqq 2)$

が成立します．これを解くと(6)と同様な解となり $b_1=0$ を用いて

$b_n=\dfrac{1-\gamma^{n-1}}{1-\gamma}\alpha^{n-2}b_2\ (n\geqq 2)$,

$\gamma^{n-1}\neq 1$ のとき $b_n\neq 0$

$$\therefore\ u_{n+m-1}=\frac{a_{n+m}}{a_{n+m-1}}=\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{1-\gamma^n}{1-\gamma^{n-1}}\alpha\quad (m\geqq 2,\ n\geqq 2) \tag{8}$$

〈 ii 〉 $a_1=0$ の場合 $a_2\neq 0$

(6)から $a_n=\dfrac{1-\gamma^{n-1}}{1-\gamma}\alpha^{n-2}a_2$

$\therefore\ \gamma^{n-1}\neq 1$ のとき $a_n=\dfrac{1-\gamma^{n-1}}{1-\gamma^{n-2}}\alpha a_{n-1}\neq 0$

$(n=3,\ 4,\ \cdots\cdots)$

$$\therefore\ u_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1-\gamma^n}{1-\gamma^{n-1}}\alpha\ (n\geqq 2) \tag{9}$$

〈iii〉 $a_n\neq 0\ (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ の場合 $a_2=u_1a_1\neq 0$ とおけます．(6)から $u_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ は

$$u_n=\frac{(1-\gamma^n)a_2-(1-\gamma^{n-1})\beta a_1}{(1-\gamma^{n-1})a_2-(1-\gamma^{n-2})\beta a_1}\alpha$$
$$=\frac{(1-\gamma^n)u_1-(1-\gamma^{n-1})\beta}{(1-\gamma^{n-1})u_1-(1-\gamma^{n-2})\beta}\alpha \tag{10}$$

特に $u_1=\alpha$ のとき $u_n=\alpha\ (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$

$\therefore\ L=\alpha$

$u_1=\beta$ のとき $u_n=\beta\ (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$

$\therefore\ L=\beta$

ゆえに〔I〕，〔II〕ともに〈iii〉では初期条件が $u_1^2-pu_1-p^2k=0$ を満たすとき $L=u_1$ となります．その他の各場合の $u_n$ について $L$ を求めます．

〔I〕の場合 $n^{-1}\longrightarrow 0\ (n\longrightarrow\infty)$ により〈 i 〉，〈 ii 〉，〈iii〉いずれの場合も $L=\alpha$

〔II〕の場合 $u_n$ は $\gamma^n$ に関係します．

$$\left(\frac{\alpha}{p},\ \frac{\beta}{p}\right)=\frac{1\pm(1+4k)^{\frac{1}{2}}}{2}\qquad\left(k\neq-\frac{1}{4}\right) \tag{11}$$

から $\gamma$ は $k$ に関係し

① $k$ が虚数　② $k>-\dfrac{1}{4}$　③ $k<-\dfrac{1}{4}$

の各場合につき考えます．

① $k$ が虚数のとき $(1+4k)^{\frac{1}{2}}$ は純虚数でない虚数

$\therefore\ |\alpha|\neq|\beta|\quad\therefore\ |\alpha|>|\beta|$

② $k>-\dfrac{1}{4}$ のとき $\dfrac{\alpha}{p}$，$\dfrac{\beta}{p}$ は異なる実数

$\alpha+\beta=p\neq 0\quad\therefore\ |\alpha|>|\beta|$

$|\alpha|>|\beta|$ の場合

$\left|\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^n\right|=\left(\dfrac{|\beta|}{|\alpha|}\right)^n\longrightarrow 0\ (n\longrightarrow\infty)$

$\therefore\ \gamma^n\longrightarrow 0\ (n\longrightarrow\infty)$

ゆえに〈 i 〉，〈 ii 〉，〈iii〉のとき，それぞれ(8)，(9)，(10)により $L=\alpha$

③ $k<-\dfrac{1}{4}$ のとき $\dfrac{\alpha}{p}$，$\dfrac{\beta}{p}$ は共役複素数であるから $\left|\dfrac{\beta}{p}\right|=\left|\dfrac{\alpha}{p}\right|\quad\therefore\ |\alpha|=|\beta|$

$|\alpha|=|\beta|$ の場合 $\alpha+\beta=p\neq 0\quad\therefore\ \gamma=e^{i\theta}$

$(0<\theta<\pi$；$e$ は自然対数の底；$i^2=-1)$

つまり複素数 $\gamma$ は複素平面において単位円上で偏角 $\theta$ の点と表せるので数列 $\{\gamma^n\}\ (n\longrightarrow\infty)$ は発散し〈 i 〉，〈 ii 〉，〈iii〉いずれの場合も $L$ は確定しません．

特に$\dfrac{\theta}{\pi}$が既約分数$\dfrac{r}{s}$ $(0<r<s)$ のときは

$\gamma^n=e^{i(r/s)n\pi}$ と表せるので

〈a〉 $r$が偶数のとき $n=hs+t$ $(h=0,\ 1,\ \cdots\cdots)$, $(1\leqq t\leqq s)$ に対し $\gamma^n=e^{i(r/s)t\pi}$

∴ $u_{hs+t}=u_t$ $(h=0,\ 1,\ \cdots\cdots)$ となり，数列 $\{u_n\}$ は$s$項ごとに同じ数値が現れます．

〈b〉 $r$が奇数のとき $n=2hs+t$ $(h=0,\ 1,\ \cdots\cdots)$, $(1\leqq t\leqq 2s)$ に対し $\gamma^n=e^{i(r/s)t\pi}$

∴ $u_{2hs+t}=u_t$ $(h=0,\ 1,\ \cdots\cdots)$ となり，数列 $\{u_n\}$ は$2s$項ごとに同じ数値が現れます．

$u_n$の値の周期は$u_n$が存在しない項についても成立し，$a_n=0$ が対応します．つまり

〈a〉の場合 $a_m=0$ ならば $a_{hs+m}=0$, $(h=0,\ 1,\ \cdots\cdots)$：数列$\{a_n\}$は$s$項ごとに0

〈b〉の場合 $a_m=0$ ならば $a_{2hs+m}=0$, $(h=0,\ 1,\ \cdots\cdots)$：数列$\{a_n\}$は$2s$項ごとに0

となります．虚数$\dfrac{\beta}{\alpha}$の偏角$\theta$は(11)の関係から

$$\tan\frac{\theta}{2}=(-4k-1)^{\frac{1}{2}} \qquad (12)$$

∴ $\tan\theta=\dfrac{(-4k-1)^{\frac{1}{2}}}{2k+1}$ $(0<\theta<\pi)$ が成立し$k$の値により$\theta$が決まります．

逆に $\tan\theta=t$, $t(2k+1)=w$ とおくと

$w^2=-4k-1=-\dfrac{2w}{t}+1>0$ を満たすので

$w=-t^{-1}+(t^{-2}+1)^{\frac{1}{2}}$

$$\therefore\ k=\frac{-t^2-1+t(t^{-2}+1)^{\frac{1}{2}}}{2t^2} \qquad (13)$$

となります．$\dfrac{\theta}{\pi}$が有理数のとき数列$\{u_n\}$の項が循環する周期を$T$とすると(8)から

$\left[\dfrac{u_m}{p}\right]_m=\dfrac{1-\gamma^m}{1-\gamma^{m-1}}\dfrac{\alpha}{p}$ $(m=2,\ 3,\ \cdots\cdots T)$ の値が循環します．また $a_m=0$ $(m=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ T)$ を満たす $a_1$, $a_2$ は(7)から

$\left[\dfrac{a_2}{pa_1}\right]_m=\dfrac{1-\gamma^{m-2}}{1-\gamma^{m-1}}\dfrac{\beta}{p}$ $(m=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ T)$ で決まります．$\gamma^T=1$ によりこの両者の間に次の関係式が成立します．

$$\left[\frac{a_2}{pa_1}\right]_{T-m+2}=\frac{1-\gamma^{T-m}}{1-\gamma^{T-m+1}}\frac{\alpha\gamma}{p}$$
$$=\frac{\gamma^m-1}{\gamma^{m-1}-1}\frac{\alpha}{p}=\left[\frac{u_m}{p}\right]_m$$

有理数 $0<\dfrac{r}{s}<1$ が任意のとき $t=\tan\dfrac{r}{s}\pi$ として(13)により $k<-\dfrac{1}{4}$ の値は求められますが，任意の実数$k$に対しては(12)により

$0<\dfrac{2}{\pi}\tan^{-1}\left\{(-1-4k)^{\frac{1}{2}}\right\}<1$ が有理数となる場合に限り数列$\{u_n\}$の項が周期をもち，$a_1=0$ とすると数列$\{a_n\}$に0の項が周期的に現れます．

以上により次の結論を得ます．

数列 $\{a_n\}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ が
$(a_1,\ a_2)\neq(0,\ 0)$, $pk\neq0$, $a_{n+1}=pa_n+p^2ka_{n-1}$
$(n=2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ により定義され，$u_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$
$(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ の極限を $u_n\to L\ (n\to\infty)$
とし，$t^2-pt-p^2k=0$ の解を $\alpha$, $\beta$ $(|\alpha|\geqq|\beta|)$,
$\gamma=\dfrac{\beta}{\alpha}$ とおきます．

[A] $u_1$が $u_1^2-pu_1-p^2k=0$ を満たすとき $u_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ は定数で $L=u_1$

その他の場合は

[B] $k$が虚数，または $k\geqq-\dfrac{1}{4}$ のとき$L$は収束し $L=\alpha$

[C] $k<-\dfrac{1}{4}$ のとき$L$は発散し，$\gamma=e^{i\theta}$ $(0<\theta<\pi)$ とおけます．特に

[D] $t=\tan\theta$として $k=\dfrac{-t^2-1+t(t^{-2}+1)^{\frac{1}{2}}}{2t^2}$ のとき$\dfrac{\theta}{\pi}$が有理数となり，$\gamma^n$, $u_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ は周期をもち周期ごとに同じ数値が現れます．

具体的には

[E] $\dfrac{\theta}{\pi}=\dfrac{r}{s}$：既約分数のとき周期 $T=s$（$r$が偶数のとき），$T=2s$（$r$が奇数のとき）です．

1．$\{a_n\}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ は$a_1$, $a_2$の比により数値が0の項 $a_m=0$ が $(m=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T)$ のいずれかに現れます．

2．$\{u_n\}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ の各項は$u_m$ $(m=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T)$ のいずれかで，要素に0, $p$, $\dfrac{1}{0}$(不定数)を含みます．$\dfrac{1}{0}$は1. の $a_n=0$ に対応する$u_n$です．

3．2. の場合の $u_m$ に対し $\dfrac{u_m}{p}$ の数値を $\left[\dfrac{u_m}{p}\right]_m$ で表し，1. の場合の $a_m=0$ に対応する $\dfrac{a_2}{pa_1}$ の数値を $\left[\dfrac{a_2}{pa_1}\right]_m$ で表すと関係式

$\left[\dfrac{a_2}{pa_1}\right]_{T-m+2}=\left[\dfrac{u_m}{p}\right]_m$ が成立します．

〔具体例〕

$\left[\dfrac{u_m}{p}\right]_m$, $\left[\dfrac{a_2}{pa_1}\right]_m$ の値は $p$ に無関係なので $p=1$ とした漸化式 $a_{n+1}=a_n+ka_{n-1}$ により $\{a_n\}$ を求め，$a_m=0$ を満たす $\left[\dfrac{a_2}{pa_1}\right]_m$ を計算します．更に $a_1=0$, $a_2=1$ として $\left[\dfrac{u_m}{p}\right]_m$ を計算します．

| | | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ | ⑦ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\theta/\pi$ | | 1/6 | 1/4 | 1/3 | 1/2 | 2/3 | 3/4 | 5/6 |
| $t=\tan\theta$ | | $3^{-1/2}$ | 1 | $3^{1/2}$ | * | $-3^{1/2}$ | $-1$ | $-3^{-1/2}$ |
| $k$ | | $-2+3^{1/2}$ | $-1+2^{-1/2}$ | $-1/3$ | $-1/2$ | $-1$ | $-1-2^{-1/2}$ | $-2-3^{1/2}$ |
| $T$ | | 12 | 8 | 6 | 4 | 3 | 8 | 12 |
| | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| | 3 | $2-3^{1/2}$ | $1-2^{-1/2}$ | 1/3 | 1/2 | 1 | $1+2^{-1/2}$ | $2+3^{1/2}$ |
| | 4 | $(3^{1/2}-1)/2$ | $2^{1/2}-1$ | 1/2 | 1 | | $-1-2^{1/2}$ | $(-1-3^{1/2})/2$ |
| | 5 | $1-3^{-1/2}$ | 1/2 | 2/3 | | | 1/2 | $1+3^{-1/2}$ |
| $\left[\dfrac{a_2}{pa_1}\right]_m$ | 6 | $2\cdot3^{1/2}-3$ | $2-2^{1/2}$ | 1 | | | $2+2^{1/2}$ | $-3-2\cdot3^{1/2}$ |
| | 7 | 1/2 | $2^{-1/2}$ | | | | $-2^{-1/2}$ | 1/2 |
| $2\leqq m\leqq T$ | 8 | $4-2\cdot3^{1/2}$ | 1 | | | | 1 | $4+2\cdot3^{1/2}$ |
| | 9 | $3^{-1/2}$ | | | | | | $-3^{-1/2}$ |
| | 10 | $(3-3^{1/2})/2$ | | | | | | $(3+3^{1/2})/2$ |
| | 11 | $3^{1/2}-1$ | | | | | | $-1-3^{1/2}$ |
| | 12 | 1 | | | | | | 1 |
| | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 3 | $3^{1/2}-1$ | $2^{-1/2}$ | 2/3 | 1/2 | 0 | $-2^{-1/2}$ | $-1-3^{1/2}$ |
| | 4 | $(3-3^{1/2})/2$ | $2-2^{1/2}$ | 1/2 | 0 | | $2+2^{1/2}$ | $(3+3^{1/2})/2$ |
| | 5 | $3^{-1/2}$ | 1/2 | 1/3 | | | 1/2 | $-3^{-1/2}$ |
| $\left[\dfrac{u_m}{p}\right]_m$ | 6 | $4-2\cdot3^{1/2}$ | $2^{1/2}-1$ | 0 | | | $-1-2^{1/2}$ | $4+2\cdot3^{1/2}$ |
| | 7 | 1/2 | $1-2^{-1/2}$ | | | | $1+2^{-1/2}$ | 1/2 |
| $2\leqq m\leqq T$ | 8 | $2\cdot3^{1/2}-3$ | 0 | | | | 0 | $-3-2\cdot3^{1/2}$ |
| | 9 | $1-3^{-1/2}$ | | | | | | $1+3^{-1/2}$ |
| | 10 | $(3^{1/2}-1)/2$ | | | | | | $(-1-3^{1/2})/2$ |
| | 11 | $2-3^{1/2}$ | | | | | | $2+3^{1/2}$ |
| | 12 | 0 | | | | | | 0 |

$\left[\dfrac{a_2}{pa_1}\right]_{T-m+2}=\left[\dfrac{u_m}{p}\right]_m$ の関係にあります．

[1994．3．20]

(追手門学院高等学校)