大学入試の背景を探る

宮川(みやかわ)　幸隆(ゆきたか)

本稿では，東京工大の '90 年後期の問題

> n を 2 以上の整数とする．
> (i)　$(n-1)$ 次多項式 $P_n(x)$ と n 次多項式 $Q_n(x)$ ですべての実数 θ に対して
> $\sin(2n\theta)=n\sin(2\theta)P_n(\sin^2\theta)$,
> $\cos(2n\theta)=Q_n(\sin^2\theta)$
> を満たすものが存在することを帰納法を用いて示せ．
> (ii)　$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1$ に対して
> $\alpha_k=\left(\sin\dfrac{k\pi}{2n}\right)^{-2}$ とおくと
> $P_n(x)=(1-\alpha_1x)(1-\alpha_2x)\cdots\cdots(1-\alpha_{n-1}x)$
> となることを示せ．
> (iii)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k=\frac{2n^2-2}{3}$ を示せ．

の背景を探ります．

§0. 複素関数としての sin

本稿では，上の(i)を高い立場から厳密に証明します．(i)のその証明こそが本質的であって，それが実行されさえすれば，(ii)，(iii)は容易に導かれます．すなわち，これから述べる(i)の高級な証明こそが上の問題の背景にほかなりません．高級な証明ですから帰納法を用いるような初等的なものではありません．

そして，その証明を行うために，三角関数 sin を複素関数としてとらえておく必要に迫られます．

オイラーの公式

(1)　$e^{iy}=\cos y+i\sin y$　(y：実数)

によれば

(2)　$e^{-iy}=\cos y-i\sin y$

であるから，(1)と(2)から，

(3)　$\sin y=\dfrac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}$

である．

ここで y は実数であるが，(3)において y を任意の複素数として，sin を複素変数にまで拡張する．

すなわち，

(4)　$\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

で，z は複素変数とする．すると，

$$\frac{\sin(2nz)}{\sin(2z)}=\frac{e^{2niz}-e^{-2niz}}{e^{2iz}-e^{-2iz}}$$

であるが，

$$\frac{x^n-y^n}{x-y}=x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}$$

を用いて，

$$\frac{\sin(2nz)}{\sin(2z)}$$
$$=e^{2(n-1)iz}+e^{2(n-2)iz}e^{-2iz}+\cdots\cdots+e^{-2(n-1)iz}$$
$$=e^{2(n-1)iz}+e^{2(n-3)iz}+\cdots\cdots+e^{2(1-n)iz}$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{ここに }\sin(2z)\neq0\text{，すなわち，}e^{2iz}\neq e^{-2iz}\text{，}\\ e^{-2y}(\cos2x+i\sin2x)\neq e^{2y}(\cos2x-i\sin2x)\text{，}\\ \text{すなわち，任意の整数}m\text{に対して }2z\neq m\pi\end{array}\right.$$

となる．そこで，

$$f(z)=e^{2(n-1)iz}+e^{2(n-3)iz}+\cdots\cdots+e^{2(1-n)iz}$$

とおくと，

$$\frac{d}{dz}e^z=e^z$$

により，$f(z)$ は全複素平面において微分可能である．

§1. 正則周期関数 $f(z)$ の基本領域

前節の最後でみたように，$f(z)$ は全複素平面において微分可能（正則）である．しかも π を基本周期とする周期関数でもある．本節では，この $f(z)$ の基本領域と呼ばれるものを導入し，それを用いて，$f(z)$ を $w=w(z)=\sin^2z$ の関数とみなせることを注意し，その関数を $g(w)$ としたとき，すなわち

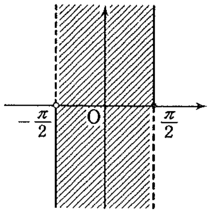
$$f(z)=g(w)$$

としたとき，$g(w)$ が w の関数として全 w 平面において微分可能であることを示す．

さて，複素平面 C 上の領域

$$\mathrm{F}'=\left\{z\in\mathrm{C}\,\middle|\,-\frac{\pi}{2}<\mathrm{Re}(z)<\frac{\pi}{2}\right\}$$
$$\cup\left\{z\in\mathrm{C}\,\middle|\,\mathrm{Re}(z)=-\frac{\pi}{2},\ \mathrm{Im}(z)<0\right\}$$
$$\cup\left\{z\in\mathrm{C}\,\middle|\,\mathrm{Re}(z)=\frac{\pi}{2},\ \mathrm{Im}(z)\geqq 0\right\}$$

を考えると，



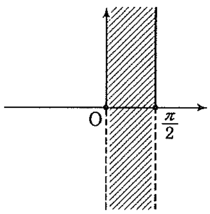
(5) F′ の任意の 2 点 z, z' に対して $z=z'+m\pi$ なる整数 m は存在しない

(6) C 上の各点 z に対して，F′ のある点 z' とある整数 m が存在して $z=z'+m\pi$ となる

という 2 性質が成り立つ．この F′ を $f(z)$ の**基本領域**と呼ぶ．

C 上の領域

$$\mathrm{F}''=\left\{z\in\mathrm{C}\,\middle|\,0<\mathrm{Re}(z)<\frac{\pi}{2}\right\}$$
$$\cup\left\{z\in\mathrm{C}\,\middle|\,\mathrm{Re}(z)=\frac{\pi}{2},\ \mathrm{Im}(z)\geqq 0\right\}$$
$$\cup\{z\in\mathrm{C}\,|\,\mathrm{Re}(z)=0,\ \mathrm{Im}(z)\geqq 0\}$$



を考える．

定理 1

$\sin^2 z$ を上の F″ に制限したものは，F″ から C の上への 1 対 1 の関数である．

証明　w を C の任意の要素とするとき，(4)から

$\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\sqrt{w}$　すなわち，

$e^{iz}-e^{-iz}=2i\sqrt{w}$　すなわち，

$(e^{iz})^2-2i\sqrt{w}\,e^{iz}-1=0$　すなわち，

$e^{iz}=i\sqrt{w}\pm\sqrt{-w+1}$ …… (7)　すなわち，

$e^{-y}(\cos x+i\sin x)=i\sqrt{w}\pm\sqrt{-w+1}$

なる実数 x, y が存在する．

$\left[\because\ i\sqrt{w}\pm\sqrt{1-w}=0 \Longrightarrow i\sqrt{w}=\pm\sqrt{1-w}\right.$
$\left.\Longrightarrow -w=1-w \text{ であるから } i\sqrt{w}\pm\sqrt{1-w}\neq 0\right.$

よって，(7)を満たす z ($\in$C) が存在する．

すなわち，

(8)　$\sin^2 z=w$

なる z ($\in$C) が存在する．したがって(6)により，(8)を満たす z ($\in$F′) が存在する．

[∵ (6)により，F′ のある点 z' に対して，

$z=z'+m\pi$ (m は整数)

であり，

$$w=\sin^2 z=\sin^2(z'+m\pi)$$
$$=\left(\frac{e^{i(z'+m\pi)}-e^{-i(z'+m\pi)}}{2i}\right)^2 \quad [\because(4)]$$
$$=\frac{e^{2i(z'+m\pi)}-2+e^{-2i(z'+m\pi)}}{-4}$$
$$=\frac{e^{2iz'}-2+e^{-2iz'}}{-4}=\left(\frac{e^{iz'}-e^{-iz'}}{2i}\right)^2$$
$$=\sin^2 z'$$

この z に対して，

$$\left(-\frac{\pi}{2}<\mathrm{Re}(z)<0 \text{ かつ } \mathrm{Im}(z)\geqq 0\right)$$

または $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\mathrm{Re}(z)\leqq 0 \text{ かつ } \mathrm{Im}(z)<0\right)$

ならば $-z\in$F″ であり，

$z=-z$ が(8)を満たす．

$\left[\because\ \sin^2(-z)=\left(\dfrac{e^{-iz}-e^{iz}}{2i}\right)^2=\sin^2 z\right.$

以上によって，$\sin^2 z$ は F″ から C の上への関数である．

次に，z, $z'\in$F″ のとき，

$\sin^2 z=\sin^2 z' \Longrightarrow \sin z=\sin z'$, $\sin(-z')$

しかるに凸状領域 $\mathrm{D}=\left\{z\in\mathrm{C}\,\middle|\,-\dfrac{\pi}{2}<\mathrm{Re}(z)<\dfrac{\pi}{2}\right\}$

で微分可能な

$$\sin z=\sin(x+iy)=\frac{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}}{2i}$$
$$=\frac{e^{-y}(\cos x+i\sin x)-e^{y}(\cos x-i\sin x)}{2i}$$
$$=\frac{-ie^{-y}(\cos x+i\sin x)+ie^{y}(\cos x-i\sin x)}{2}$$
$$=\frac{(e^{-y}+e^{y})\sin x}{2}+i\frac{(e^{y}-e^{-y})\cos x}{2}$$

の導関数 $(\sin z)'$ の実部 $\dfrac{e^{-y}+e^{y}}{2}\cos x$ は，D の各点において

$$\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}\cos x>0$$

を満たすから，$\sin z$ はDで1対1である．そこで $0\leqq \mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Re}(z')<\frac{\pi}{2}$ のときは z, z', $-z'\in$ D であるから，

$$\begin{aligned} z\neq z' &\Longrightarrow z\neq z' \ \text{かつ}\ z\neq -z' \\ &\Longrightarrow \sin z\neq \sin z' \ \text{かつ} \\ &\qquad\qquad \sin z\neq \sin(-z') \\ &\Longrightarrow \sin^2 z\neq \sin^2 z' \end{aligned}$$

$\mathrm{Re}(z)=\frac{\pi}{2}$ のときは，$z\in$ F$''$ から $z=\frac{\pi}{2}+iy$ $(y\geqq 0)$ と書けて，$z'=x'+iy'$ とおくとき，

$$x'=\frac{\pi}{2}\ \text{かつ}\ z\neq z' \Longrightarrow z'=\frac{\pi}{2}+iy' \ \begin{pmatrix} y'\geqq 0, \\ y'\neq y \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \sin z=\sin\left(\frac{\pi}{2}+iy\right)=\cos(iy)=\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}$$

$$\text{かつ}\ \sin z'=\frac{e^{-y'}+e^{y'}}{2}$$

$$\text{かつ}\ \sin(-z')=-\frac{e^{-y'}+e^{y'}}{2}$$

$$\text{かつ}\ y\neq y'\ \text{かつ}\ y\geqq 0\ \text{かつ}\ y'\geqq 0$$

$$\Longrightarrow \sin z\neq \sin z'\ \text{かつ}\ \sin z\neq \sin(-z')$$

$$\Longrightarrow \sin^2 z\neq \sin^2 z'$$

次に $x'\neq\frac{\pi}{2}$ とする．

$$\begin{aligned} &\sin z'=\sin(x'+iy') \\ &=\sin x'\cos(iy')+\cos x'\sin(iy') \\ &=\frac{e^{-y'}+e^{y'}}{2}\sin x'+\frac{e^{-y'}-e^{y'}}{2i}\cos x', \end{aligned}$$

$\sin(-z')=-\sin z'$ であるから，$e^{-y'}\neq e^{y'}$ すなわち，$y'\neq 0$ のときは $\sin z'$, $\sin(-z')$ は虚数となり，$\sin z=\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}$ (実数) に等しくなることはない．よって，$\sin^2 z\neq \sin^2 z'$

$y'=0$ のときは，

$\sin z'=\sin x'$, $\sin(-z')=-\sin x'$ である．

一方，$0\leqq x'<\frac{\pi}{2}$ であるから，

$$\sin z',\ \sin(-z')<1$$

しかるに $\sin z=\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}\geqq 1$ であるから，

$\sin z\neq \sin z'$ かつ $\sin z\neq \sin(-z')$

$\therefore\ \sin^2 z\neq \sin^2 z'$

$\mathrm{Re}(z')=\frac{\pi}{2}$ かつ $z\neq z'$ のときも上と同様に

$$\sin^2 z\neq \sin^2 z'$$

を得るから $\sin^2 z$ は F$''$ から C の上への1対1の関数である． (証明終)

さて，

$$f(z)=e^{2(n-1)iz}+e^{2(n-3)iz}+\cdots\cdots+e^{2(1-n)iz}$$

は π を基本周期とする正則同期関数であった．更にその形から，

$$f(-z)=f(z)$$

であるから，$f(z)$ を $w=w(z)=\sin^2 z$ の関数と考えて，

$$f(z)=g(w)$$

とする．$w(0)=0$, $w\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$,

$$w\left(\frac{\pi}{2}+iy\right)=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+iy\right)=\left(\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}\right)^2\geqq 1,$$

$$\lim_{y\to\infty} w\left(\frac{\pi}{2}+iy\right)=\infty$$

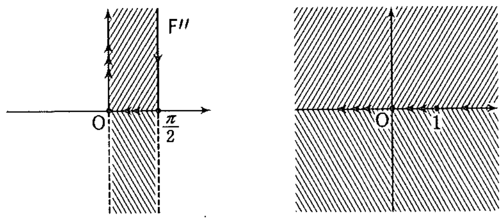
y	0	……
$w\left(\frac{\pi}{2}+iy\right)$	1	↗

$$w(0+iy)=\sin^2(iy)=\left(\frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}\right)^2$$

$$=\frac{e^{-2y}+e^{2y}-2}{-4}\leqq 0,$$

y	0	……
$w(0+iy)$	0	↘

$\lim\limits_{y\to\infty} w(0+iy)=-\infty$ などにより下のような対応図を得る．



z平面　　w平面

$$w'(z)=2\sin z\cos z$$

であるから，$w(z)$ は F$''$ の各点で微分可能である．そして更に，$w(z)$ は F$''$ において1対1であったから，その像領域 C において w の逆関数も微分可能かつ1対1である．更には w の連続性によって，z 平面上の F$''$ は w 平面を実軸の $[-\infty,\ 0)$ と $(1,\ \infty]$ の部分で切り割いたものに対応するが，ここにおいて上の逆関数 (微分可能である！) と微分可能な関数 $f(z)$ との合成関数であるところの $g(w)$ は w に関して微分可能である．一方，

$$g(w(-z))=g(w(z))$$

によって，いま述べたばかりのw平面の切れ目の両岸でwの関数としての $g(w)$ は全く同じ値をとり正則に接続される［上述の対応図参照］．したがって，$g(w)$ はwの関数として全w平面において微分可能である．

さて，本節は冒頭の入試問題の(i)を証明するための最重要な準備段階であるが，次節においては更にもう１つの準備として１つの定理を掲載する．

§2．Liouville の定理

Liouville の定理

全複素平面 C において微分可能な関数 $F(z)$ に対して，

$$M(r)=\max_{|z|=r}|F(z)|$$

とおくとき，$M>0$ および $K\geqq 0$ なる定数 M，K に対して，

$$M(r_n)\leqq Mr_n{}^K \text{ かつ } \lim_{n\to\infty}r_n=\infty$$

なる数列 $\{r_n\}$ が存在するならば，$F(z)$ は高々 $[K]$ 次の（z の）多項式である．ここに $[K]$ は Kを越えない最大の整数である．

本稿では，この Liouville の定理を証明しないが，自由に用いることにする．

§3．冒頭の入試問題の(i)，(ii)，(iii)の証明

さて，§1 の最後により，$g(w)$ は全w平面において微分可能であった．

$$\max_{|w|=r}|g(w)|=\max_{|\sin^2 z|=r}|f(z)|$$

$$=\max_{e^{-2y}+e^{2y}-2\cos 2x=4r}|e^{2(n-1)i(x+iy)}+\cdots\cdots+e^{2(1-n)i(x+iy)}|$$

$$\leqq\max_{e^{-2y}+e^{2y}-2\cos 2x=4r}\{e^{2(1-n)y}+\cdots\cdots+e^{2(n-1)y}\}$$

$$<\max_{e^{-2y}+e^{2y}=4r+2\cos 2x}n\{(e^{-2y})^{n-1}+(e^{2y})^{n-1}\}$$

$$\leqq n(4r+2)^{n-1}$$

$$\left[\begin{array}{l}\because\ \sin(x+iy)=\dfrac{(e^{-y}+e^{y})\sin x}{2}\\ \qquad\qquad\qquad +i\dfrac{e^{y}\cos x-e^{-y}\cos x}{2}\\ n\geqq 2 \text{ により，}\\ \quad (e^{-2y})^{n-1}+(e^{2y})^{n-1}\leqq(e^{-2y}+e^{2y})^{n-1}\end{array}\right.$$

であるから，

$$M(r)=\max_{|w|=r}|g(w)|$$

とおくとき，

$$M(r)<n\left(4+\frac{2}{r}\right)^{n-1}r^{n-1}$$

であって，$r_m=m$ とおくと，

$$M(r_m)<n\left(4+\frac{2}{m}\right)^{n-1}r_m{}^{n-1}\leqq n6^{n-1}r_m{}^{n-1}$$

かつ $\displaystyle\lim_{m\to\infty}r_m=\infty$

となるから，Liouville の定理により，$g(w)$ は高々 $(n-1)$ 次の $(w=\sin^2 z)$ の多項式である．

そこで，

$$g(w)=na_{n-1}w^{n-1}+na_{n-2}w^{n-2}+\cdots\cdots+na_0$$

とおくと，

$$g(\sin^2 z)=na_{n-1}(\sin^2 z)^{n-1}+\cdots\cdots+na_0$$
$$=f(z)$$

によって，$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1$ に対して，

$w=\sin^2\dfrac{k\pi}{2n}$ は $g(w)=0$ を満たす．

$$\left[\begin{array}{l}\because\ f\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right)=0 \text{ を示せばよいが，}\\ \text{いま，} k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1 \text{ であるから，}\\ \qquad\qquad 0<\dfrac{k\pi}{2n}<\dfrac{\pi}{2}\\ \text{であり，}\\ \quad f\left(\dfrac{k\pi}{2n}\right)=\dfrac{\sin k\pi}{\sin\dfrac{k\pi}{n}}=0\end{array}\right.$$

よって，wの $(n-1)$ 次以下の代数方程式 $g(w)=0$ が $(n-1)$ 個の解をもつから，$g(w)$ はwの $(n-1)$ 次の多項式であり，$a_{n-1}\neq 0$ である．そこで，

(9) $P_n(w)=a_{n-1}w^{n-1}+a_{n-2}w^{n-2}+\cdots\cdots+a_0$

とおくと，$2z\neq m\pi$（mは整数）なるすべての複素数 z に対して，

$$\frac{\sin(2nz)}{\sin(2z)}=f(z)=g(\sin^2 z)=nP_n(\sin^2 z)$$

が成り立つから，すべての複素数 z に対して，

$$\sin(2nz)=n\sin(2z)P_n(\sin^2 z)$$

が成り立つことになり，当然，すべての実数 θ に対して，

(10) $\sin(2n\theta)=n\sin(2\theta)P_n(\sin^2\theta)$

が成り立つ．更に，(10)の両辺を θ で微分すると，

$$2n\cos(2n\theta)$$
$$=2n\left\{\cos(2\theta)P_n(\sin^2\theta)+\frac{1}{2}\sin^2(2\theta)P_n{}'(\sin^2\theta)\right\}$$

$\therefore\ \cos(2n\theta)$

$$=(1-2\sin^2\theta)P_n(\sin^2\theta)$$
$$\qquad+2\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)P_n{}'(\sin^2\theta)$$

となるが，右辺を $\sin^2\theta$ の多項式とみて最高次（n 次）の項の係数を考えると，それは

$$
\begin{aligned}
&-2a_{n-1}-2(n-1)a_{n-1}\\
&=-2a_{n-1}\{1+(n-1)\}\\
&=-2a_{n-1}n\neq 0
\end{aligned}
$$

であり，すべての実数 θ に対して，

(11)　$\cos(2n\theta)=Q_n(\sin^2\theta)$

を満たすような n 次多項式 $Q_n(x)$ が存在することが示された．

以上によって，(i)は**帰納法を用いずに**証明された．

次に，$a_0=1$ を証明すれば(ii)も示されたことになるが，(9)と

$$
\begin{aligned}
&Q_n(\sin^2\theta)\\
&=(1-2\sin^2\theta)P_n(\sin^2\theta)\\
&\quad+(2\sin^2\theta-2\sin^4\theta)P_n'(\sin^2\theta) \quad\cdots\cdots \text{(12)}
\end{aligned}
$$

とから，$Q_n(x)$ の定数項も a_0 である．

そこで（$Q_n(x)$ の定数項）$=1$ を示せばよいが，

$$
\begin{aligned}
(Q_n(x)\text{ の定数項})&=Q_n(\sin^2 0)\\
&=\cos 0=1
\end{aligned}
$$

となって，(ii)も示された．更に(iii)を示すためには，

(13)　（$P_n'(x)$ の定数項）$=\dfrac{2-2n^2}{3}$

を証明すればよいが，やはり(9)と(12)とから，

(14)　（$P_n'(x)$ の定数項）$\times 3-2a_0$
　　$=$（$Q_n'(x)$ の定数項）

であり，(11)の両辺を θ で微分すると

$$-2n\sin(2n\theta)=Q_n'(\sin^2\theta)\sin(2\theta)$$

となって，これに(10)を代入すると

$$-2n^2\sin(2\theta)P_n(\sin^2\theta)=Q_n'(\sin^2\theta)\sin(2\theta)$$

$$\therefore\ -2n^2P_n(\sin^2\theta)=Q_n'(\sin^2\theta)$$

となる．よって

$$
\begin{aligned}
(Q_n'(x)\text{ の定数項})&=Q_n'(\sin^2 0)\\
&=-2n^2P_n(\sin^2 0)=-2n^2a_0
\end{aligned}
$$

であるから，これと(14)と $a_0=1$ とによって，(13)が成り立つ．すなわち(iii)も示された．

〈参　考　文　献〉

[1]　能代 清 著，初等函数論，培風館

[2]　竹内 端三 著，楕圓函數論，岩波講座　數學，岩波書店

[3]　拙 著，レムニスケート関数の一性質に関する証明法について，日本数学会 1993年度 秋季総合分科会 函数論分科会 講演アブストラクト

（静岡県立 沼津東高等学校）