Ceva, Menelaus の定理再考

小寺　裕（こてら　ひろし）

1. はじめに

新指導要領で「幾何」が再登場する．久しぶりに初等幾何学が日の目を見る．Ceva の定理や Menelaus の定理も扱われる．そこで，これら 2 つの定理の証明法をいろいろな立場から考察することにより，本稿を Ceva, Menelaus の定理教材化のための素材提供としたい．

2. 約束

ここでいう Ceva の定理（以後C定理という），Menelaus の定理（以後 M 定理という）とは次のものとする．

[Ceva の定理]　△ABC の辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 D，E，F をとるとき，3 直線 AD，BE，CF が 1 点で交わるならば

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1 \qquad \text{となる．}$$

[Menelaus の定理]　△ABC の辺 BC の延長，辺 CA，辺 AB 上にそれぞれ点 D，E，F をとるとき，3 点 D，E，F が 1 直線上に並ぶならば

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=1 \qquad \text{となる．}$$

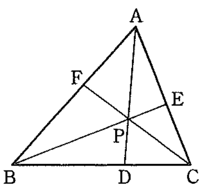

図 1

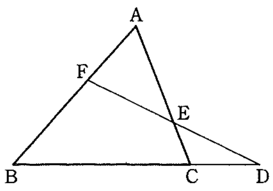

図 2

各定理の逆も成り立つが，本稿では必要性の証明のみ考察する．図は特に断りがない限り，C定理は図 1，M定理は図 2 を使うものとし，いずれも辺の比は

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}=k,\quad \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}=l,\quad \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=m$$

とおくものと約束しておく．

点 A，B，C，…… などの位置ベクトルは $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，……とする．また，証明簡略化のために

$$\Delta=\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} \qquad \text{とおく．}$$

C定理の証明は[C-n]，M定理の証明は[M-n]と番号をつけた．

3. 初等幾何学的証明

[C-1]

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}=\frac{\triangle\mathrm{CAP}}{\triangle\mathrm{CBP}},\ \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}=\frac{\triangle\mathrm{APB}}{\triangle\mathrm{APC}},\ \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=\frac{\triangle\mathrm{CBP}}{\triangle\mathrm{ABP}}$$

これら 3 式を辺々掛けて，$\Delta=1$

[M-1]

$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}=\frac{\triangle\mathrm{EDA}}{\triangle\mathrm{EBD}},\ \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}=\frac{\triangle\mathrm{EBD}}{\triangle\mathrm{ECD}},\ \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=\frac{\triangle\mathrm{ECD}}{\triangle\mathrm{EDA}}$$

これら 3 式を辺々掛けて，$\Delta=1$

4. 解析的証明

B を原点，BC を x 軸にとり，A$(a,\ b)$，C$(c,\ 0)$ とおく．

[C-2]

$\mathrm{D}\left(\dfrac{lc}{l+1},\ 0\right)$，$\mathrm{E}\left(\dfrac{ma+c}{m+1},\ \dfrac{mb}{m+1}\right)$，

$\mathrm{F}\left(\dfrac{a}{k+1},\ \dfrac{b}{k+1}\right)$ であるから，直線 AD，CF，BE の方程式はそれぞれ

$$b(l+1)x+(lc-la-a)y-bcl=0$$
$$bx+(c+ck-a)y-bc=0$$
$$mbx-(ma+c)y=0$$

となり，この 3 直線が 1 点で交わる条件は

$$\det\begin{bmatrix} b(l+1) & lc-la-a & -bcl \\ b & c+ck-a & -bc \\ mb & -(ma+c) & 0 \end{bmatrix}=0$$

すなわち　$klm=1$

[M-2]

$\mathrm{D}\left(\dfrac{lc}{l-1},\ 0\right)$ で，E，F の座標は[C-4]と同じである

から，3点D，E，Fが1直線上にある条件は

$$\det\begin{bmatrix} \dfrac{lc}{l-1} & 0 & 1 \\ \dfrac{ma+c}{m+1} & \dfrac{mb}{m+1} & 1 \\ \dfrac{a}{k+1} & \dfrac{b}{k+1} & 1 \end{bmatrix}=0$$

すなわち　$klm=1$

5. ベクトルによる証明

[C-3]（受験数学的証明）

$\mathrm{BP}:\mathrm{PE}=s:(1-s)$,　$\mathrm{FP}:\mathrm{PC}=t:(1-t)$

とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{s}{m+1}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$=\frac{k(1-t)}{k+1}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の一次独立性より，$t=\dfrac{1}{km+m+1}$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{km}{km+m+1}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{km+m+1}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

となる．いま，

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{1}{l+1}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{l}{l+1}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=u\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ とおくと，

同様に一次独立性より　$klm=1$

[M-3]　$\mathrm{FE}:\mathrm{ED}=t:(1-t)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\frac{1-t}{k+1}\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\frac{tl}{l-1}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$
$$=\frac{m}{m+1}\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\frac{1}{m+1}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{BA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ の一次独立性より $klm=1$ がわかる．

[C-4]　$\vec{d}=\alpha\vec{b}+\alpha'\vec{c}$，$\vec{e}=\beta\vec{c}+\beta'\vec{a}$，

$\vec{f}=\gamma\vec{a}+\gamma'\vec{b}$，$\alpha+\alpha'=\beta+\beta'=\gamma+\gamma'=1$

とおく．△ABCの内部の点Pについては，

$$\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}\quad (x+y+z=1)$$

となる正数x，y，zが一意に決まる．

$\vec{p}=x\vec{a}+\dfrac{y\vec{b}+z\vec{c}}{y+z}(y+z)$ と変形すると，

$\vec{u}=\dfrac{y\vec{b}+z\vec{c}}{y+z}$ はAP上の点であり，かつまたBC上の点でもあるから　$\vec{u}=\vec{d}=\alpha\vec{b}+\alpha'\vec{c}$

よって

$\dfrac{\alpha}{\alpha'}=\dfrac{y}{z}$　同様にして $\dfrac{\beta}{\beta'}=\dfrac{z}{x}$，　$\dfrac{\gamma}{\gamma'}=\dfrac{x}{y}$

$\therefore\quad \alpha\beta\gamma=\alpha'\beta'\gamma'$

[M-4]　[C-4]と同じ記号で，

D，E，Fが一直線上にあるから

$$x\vec{d}+y\vec{e}+z\vec{f}=\vec{0}\quad (x+y+z=0)$$

となる．同時に0でないx，y，zが一意に決まる．

$x(\alpha\vec{b}+\alpha'\vec{c})+y(\beta\vec{c}+\beta'\vec{a})+z(\gamma\vec{a}+\gamma'\vec{b})=\vec{0}$

より

$(z\gamma+y\beta')\vec{a}+(x\alpha+z\gamma')\vec{b}+(y\beta+x\alpha')\vec{c}=\vec{0}$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の係数の和は

$$(z\gamma+y\beta')+(x\alpha+z\gamma')+(y\beta+x\alpha')$$
$$=x(\alpha+\alpha')+y(\beta+\beta')+z(\gamma+\gamma')$$
$$=x+y+z=0$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は一直線上にないので

$z\gamma+y\beta'=x\alpha+z\gamma'=y\beta+x\alpha'=0$

$\therefore\quad \alpha\beta\gamma=-\alpha'\beta'\gamma'$

6. 変換による証明

平面上の定点$\mathrm{P}(a,\ b)$と実数$r(\neq 0)$に対して，この平面上の変換$\delta_{\mathrm{P},r}$を

$\delta_{\mathrm{P},r}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} rx+(1-r)a \\ ry+(1-r)b \end{bmatrix}$ と定義する．

すなわち，$\delta_{\mathrm{P},r}(\mathrm{A})=\mathrm{B}$ は $\overrightarrow{\mathrm{PB}}=r\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ を意味している．次の補題1，2は明らかであろう．

補題 1. $\delta_{\mathrm{P},r}$で直線lは直線l'に移り，$l /\!/ l'$である．

補題 2. $\delta_{\mathrm{P},r}$でPは不動点である．

補題 3. 不動点Pを通らない直線lに対して

$\delta_{\mathrm{P},r}(l)=l$ ならば $r=1$ である．

証明は $\delta_{\mathrm{P},r}^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\dfrac{1}{r}\begin{bmatrix} x-(1-r)a \\ y-(1-r)b \end{bmatrix}$

より明らかである．

補題 4. $\mathrm{P}\neq\mathrm{Q}$，$rs\neq 1$ のとき，直線PQ上の点Rに対して　$\delta_{\mathrm{Q},s}\circ\delta_{\mathrm{P},r}=\delta_{\mathrm{R},rs}$ となる．

証明は$\mathrm{Q}(c,\ d)$とおくと

$$\delta_{\mathrm{Q},s}\circ\delta_{\mathrm{P},r}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} rsx+(1-r)sa+(1-s)c \\ rsy+(1-r)sb+(1-s)d \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} rsx+(1-rs)e \\ rsy+(1-rs)f \end{bmatrix}$$

ここに $\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{(1-r)sa+(1-s)c}{1-rs} \\ \dfrac{(1-r)sb+(1-s)d}{1-rs} \end{bmatrix}$

はPQを $(1-s):(1-r)s$ の比に分ける点であることから直ちにわかる．

補題 5. $\delta_{\mathrm{P},r}(\mathrm{A})=\delta_{\mathrm{Q},s}(\mathrm{B})$ のとき，直線ABと直線

PQ の交点Rに対して　$\delta_{Q,s}^{-1}\circ\delta_{P,r}=\delta_{R,r/s}$
が成り立つ．

証明：補題4より，直線 PQ 上の点Rに対して

$$\delta_{Q,s}^{-1}\circ\delta_{P,r}=\delta_{Q,1/s}\circ\delta_{P,r}=\delta_{R,r/s}$$

ところで，$\delta_{Q,s}^{-1}\circ\delta_{P,r}(A)=B$ であるから直線 AB は $\delta_{R,r/s}$ で不動である．よって，R は直線 AB 上の点でもある．

次の[C-5][M-5]は G.E.Martin [3]による．

[C-5]　$n=\dfrac{AC}{AE}$ とおく．

$\delta_{F,k}(B)=\delta_{C,l}(E)=A$ かつ $\delta_{D,m}(B)=\delta_{A,n}(E)=C$
となる変換を考える．

$$\delta_1=\delta_{C,l}^{-1}\circ\delta_{F,k}=\delta_{P,k/l}$$

$$\delta_2=\delta_{A,n}^{-1}\circ\delta_{D,m}=\delta_{P,m/n}$$

とおくと，$\delta_1(B)=\delta_2(B)=E$ で
$\delta_1(P)=\delta_2(P)=P$ であるから　$\delta_1=\delta_2$
すなわち　$\dfrac{k}{l}=\dfrac{m}{n}$　　∴　$\Delta=1$

[M-5]　$\delta_{F,k}(B)=A$，$\delta_{D,l}(C)=B$，$\delta_{E,m}(A)=C$
となる変換を考え　$\delta=\delta_{F,k}\circ\delta_{D,l}\circ\delta_{E,m}$ とすると
$\delta(A)=A$ で，しかも直線 DEF は δ で不動であるから，補題3，4より $klm=1$ である．

7．力学的証明

点Aを質量 a がつけられた質点と考えるとき $A(a)$ と表し，2つの質点 $A(a)$ と $B(b)$ の重心を $g(A,\ B)$ と書くことにする．

C定理の力学的表現は次のようになる．
△ABC の辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 D，E，F をとるとき，

$g(A(a),\ B(b))=F$　…… ①
$g(B(b),\ C(c))=D$　…… ②
$g(C(c),\ A(a))=E$　…… ③

となるような3つの質量 a，b，c がとれるならば $\Delta=1$ である．
これは，頂点 A，B，C にかける質量 a，b，c をうまく選べば AD，BE，CF の交点で釣り合うようにできることを示している．

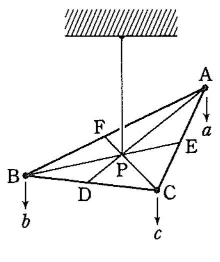

図3

次の[C-6][M-6]は，バルク[8]による．

[C-6]　Bの質量 b は任意にとり，AとCの質量 a，c を上の条件①，②を満たすようにとることができる．明らかに3つの質点 $A(a)$，$B(b)$，$C(c)$ の重心は直線 AD 及び CF 上にある，つまり点Pである．同様に考えて，$g(A,\ C)$ は直線 BP 上にあり，また AC 上にもあるので $g(A,\ C)=E$ である．これで条件①，②，③が満たされている．

①から $\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{b}{a}$，②から $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{c}{b}$，

③から $\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{a}{c}$

これらを辺々掛けて，$\Delta=1$

[M-6]　点Aには任意の質量 a をつけ，Bには①を満たす質量 b をつけ，Dには $g(B(b),\ D(d))=C$ を満たす質量 d をつける．そうすると

$\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{b}{a}$　…… ④　　$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{b+d}{b}$　…… ⑤

となる．3点 $A(a)$，$B(b)$，$D(d)$ の重心は直線 FD 上にも，AC 上にもあり，それは点Eである．点Eは質点 $A(a)$，$C(b+d)$ の重心であるから

$\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{a}{b+d}$　…… ⑥　　である．

④×⑤×⑥ から　$\Delta=1$

8．拡張的証明

C定理，M定理の拡張をいくつか示す．次の定理1，2は E. J. Routh が1891年に示したもので，Z. A. Melzak [4]による．

定理1 [C-7]
△ABC の辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 D，E，F をとり，AD，CF の交点を P，AD，BE の交点を Q，BE，CF の交点を R とし，

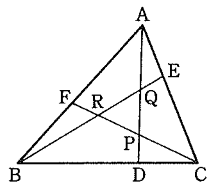

図4

$\dfrac{AF}{FB}=k$，$\dfrac{BD}{DC}=l$，$\dfrac{CE}{EA}=m$ とするとき，

$$\frac{\triangle PQR}{\triangle ABC}=\frac{(klm-1)^2}{(km+m+1)(lk+k+1)(ml+l+1)}$$

となる．

【証明】

$\dfrac{\triangle BRC}{\triangle ABC}=\dfrac{m}{km+m+1}$，$\dfrac{\triangle CPA}{\triangle ABC}=\dfrac{k}{lk+k+1}$

$\dfrac{\triangle \mathrm{AQB}}{\triangle \mathrm{ABC}}=\dfrac{l}{ml+l+1}$ から

$$\frac{\triangle \mathrm{PQR}}{\triangle \mathrm{ABC}}=1-\frac{\triangle \mathrm{BRC}}{\triangle \mathrm{ABC}}-\frac{\triangle \mathrm{CPA}}{\triangle \mathrm{ABC}}-\frac{\triangle \mathrm{AQB}}{\triangle \mathrm{ABC}}$$
$$=\frac{(klm-1)^2}{(km+m+1)(lk+k+1)(ml+l+1)}$$

定理 2 [M-7]　△ABC の辺 BC，CA，AB 上にそれぞれ点 D，E，F をとり，

$\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}=k$，$\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}=l$，$\dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=m$ とするとき，

$\dfrac{\triangle \mathrm{DEF}}{\triangle \mathrm{ABC}}=\dfrac{klm+1}{(k+1)(l+1)(m+1)}$ となる．

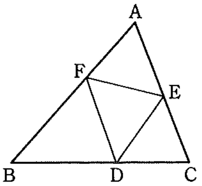

図 5

【証明】 $\dfrac{\triangle \mathrm{FBD}}{\triangle \mathrm{ABC}}=\dfrac{l}{(k+1)(l+1)}$

$\dfrac{\triangle \mathrm{ECD}}{\triangle \mathrm{ABC}}=\dfrac{m}{(l+1)(m+1)}$

$\dfrac{\triangle \mathrm{AFE}}{\triangle \mathrm{ABC}}=\dfrac{k}{(m+1)(k+1)}$ であるから

$$\frac{\triangle \mathrm{DEF}}{\triangle \mathrm{ABC}}=1-\frac{\triangle \mathrm{FBD}}{\triangle \mathrm{ABC}}-\frac{\triangle \mathrm{ECD}}{\triangle \mathrm{ABC}}-\frac{\triangle \mathrm{AFE}}{\triangle \mathrm{ABC}}$$
$$=\frac{klm+1}{(k+1)(l+1)(m+1)}$$

定理 1 で AD，BE，CF が 1 点で交わる条件は △PQR＝0 となることであるから，$klm=1$ これはC定理である．定理 2 で，3 点 D，E，F が一直線上に並ぶ条件は △EDF＝0 となることであるから $klm=-1$ これはM定理である．次の定理は C定理，M定理を合わせて拡張したものであり，M. S. Klamkin，A. Liu [5]による．

定理 3 [C-8][M-8]　△ABC において，BC，CA，AB 上にそれぞれ点 D，E，F を

$\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}}=k$，$\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}}=l$，

$\dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}}=m$ にとり，同様に

点 G，H，I を $\dfrac{\mathrm{BI}}{\mathrm{IA}}=u$，

$\dfrac{\mathrm{CG}}{\mathrm{GB}}=v$，$\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HC}}=w$

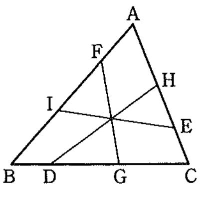

図 6

となるようにとるとき，3 直線 DH，EI，FG が 1 点で交わるならば，

$klm+uvw+ku+lv+mw=1$ である．

【証明】 交点 $\vec{p}$ は $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ $(x+y+z=1)$ と一意に表せる．

$$\vec{h}=\frac{1}{w+1}\vec{a}+\frac{w}{w+1}\vec{c},\qquad \vec{d}=\frac{1}{l+1}\vec{b}+\frac{l}{l+1}\vec{c}$$

から，HP：PD＝$t:(1-t)$ とおくと

$$\vec{p}=\frac{1-t}{w+1}\vec{a}+\frac{t}{l+1}\vec{b}+\left\{\frac{tl}{l+1}+\frac{(1-t)w}{w+1}\right\}\vec{c}$$

したがって

$$x=\frac{1-t}{w+1},\quad y=\frac{t}{l+1},\quad z=\frac{tl}{l+1}+\frac{(1-t)w}{w+1}$$

すなわち　$wx+ly-z=0$　…… ①

同様にして，P が GF，EI 上にあることから

$kx-y+vz=0$　…… ②

$x-uy-mz=0$　…… ③

①，②，③を満たす $(x,\ y,\ z)\neq(0,\ 0,\ 0)$ が存在する条件は

$\det\begin{bmatrix} w & l & -1 \\ k & -1 & v \\ 1 & -u & -m \end{bmatrix}=0$ であるから

$klm+uvw+ku+lv+mw=1$ が示せた．

定理 3 において G，H，I がそれぞれ C，A，B に一致したとき，すなわち $u=v=w=0$ のとき $klm=1$ となり，これはC定理である．また，D，E，F がそれぞれ G，H，I に一致するときは，$ku=lv=mw=1$ で $klm=-1$ となり，これはM定理である．

9．おわりに

Ceva, Menelaus の定理は Twin Theorems といわれるくらいで，常に並んで登場する．3 直線が 1 点で交わることと，3 点が一直線上に並ぶことが互いに双対になっており，証明もできるだけ対応するような形で書いてみた．まだまだあるが，これだけ証明を並べてみると，いろいろな見方ができて定理の意味がよくわかる．なかでも，6．変換による証明，7．力学的証明，8．拡張的証明　に注目したい．[C-5][M-5]はあまり見かけない方法であるが，変換幾何学は新指導要領での新しい教育分野になろう．更に，物理的意味に触れることも教育的に重要である．[C-6]は重心という概念からこれらの定理を眺めたもので，ビジュアルで生徒達には評判のよ

かった証明である．また，定理の拡張にも興味がわく．多角形への拡張でなく，三角形内での拡張は自然な発想であり教育的にも無理のない教材になる．特に，最後の定理3はCeva, Menelaus 究極の拡張という感じがする．

現在 Ceva, Menelaus の定理はセンター試験用の裏ワザ的存在という感があるが，もっと前面に押し出して指導してもよいと思う．このようにいろいろな証明が考えられ，応用範囲も広く，教育的な材料が多く含まれており，中学の幾何から一歩進んだ教材として適切である．伝統的なユークリッド幾何ではなく，Global な立場から眺めた幾何教育でありたい．

参考文献

[1] N.A.Court：College Geometry, Barnes & Noble, 1952

[2] D.Pedoe：Geometry. A Comprehensive Course, Dover, 1970

[3] G.E.Martin：Transformation Geometry, Springer, 1982

[4] Z.A.Melzak：Invitation to Geometry, Wiley, 1983

[5] M.S.Klamkin, A.Liu：Simultaneous Generalizations of the Theorems of Ceva and Menelaus, Amer. Math. Magazine, 65(1992), 48—52

[6] 清宮俊雄：初等幾何学，裳華房，1972

[7] 那須俊夫：変換幾何入門，共立出版，1990

[8] バルク：重心の概念の幾何への応用，商工出版，1960

（東大寺学園高等学校）