無理数の無理数乗は無理数か？

($\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$＝有理数？)

塩見（しおみ） 浩三（こうぞう）

指数関数 $y=a^x$ のグラフから，a が正の無理数のときもグラフは単調増加(減少)で連続であることが予想されます．そして $y=(\sqrt{2})^x$ のグラフは $x=2$ で $y=2$，$x=4$ で $y=4$ となり，y の値が有理数になることがあります．

では，底も指数も無理数で値が有理数になることがあるのでしょうか？　直観的にはなさそうです．ないのならば証明が必要ですが，この証明は背理法を用いていくら時間をかけても不可能です．それでは有理数になるのでしょうか？　有理数になるのならば1つでもその例を発見すればよいことがわかります．

多数の数学者がこの証明と発見に挑戦したことが予想されます．

数年前に愛媛大学の理学部の数学科の理学博士もこの問題の解明について背理法と論理を用いて，無理数の無理数乗は無理数であることが証明できないことを20分ぐらい話されました．

そのときに昭和61年の大阪大学の理系の大学入試問題が頭に浮かびました．

問題

(1)　$\log_3 4$ は無理数であることを証明せよ．

(2)　a，b は無理数で，a^b が有理数であるような数の組 a，b を1組求めよ．(40点)

(61年大阪大学理系)

(解答)

(1)　$\log_3 4$ が有理数と仮定すると

$$\log_3 4=\frac{n}{m}\ (m,\ n \text{ は互いに素な自然数 } m>1)$$

とおける．

$$4=3^{\frac{n}{m}}$$

ゆえに　$4^m=3^n$

4と3は互いに素で，$m>1$ より矛盾する．

(左辺は偶数，右辺は奇数)

よって　$\log_3 4$ は無理数である．

(2)　$a=\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$ (無理数)，$b=\log_3 4$ (無理数)

とすると

$$a^b=3^{\frac{1}{2}\log_3 4}=3^{\log_3 2}=2\ (\text{有理数})$$

よって，求める a，b の1組は

$$a=\sqrt{3},\quad b=\log_3 4$$

ちなみに理学部の数学科の先生も大阪大学の卒業生でした．

その後この入試問題をお見せする機会があり，先生は大変喜んでくれました．

この問題は $a^{\log_a x}=x$ という対数の性質を用いることで数学的に興味のある問題が解決された例であると同時に直観的には無理数の無理数乗は無理数と考えるのが普通であるが，実はこの直観は間違いである貴重な例でもあります．習熟度の高い理数科の生徒にこの問題を予想させるとやはり全員が「無理数の無理乗数は無理数である」と答えました．

直観的に正しい事柄でも証明が必要であることを理解させる例ではないでしょうか．

(愛媛県立 今治東高等学校)