部分分数の積分について

岡田（おかだ）　恭二（きょうじ）

私が3年生の微分・積分の授業をしているときに，部分分数の積分について，生徒が案外迷っていることに気がつきました．問題を解く態度が，経験的で，その場しのぎの感じがしたのです．これは私にもあったのですが，「どんなときに部分分数にできるのか，そしてその分け方には決まりがあるのか」ということについて整理のつかないまま問題を解いているような気がします．そこで，私なりに考えたものを書いてみたいと思います．

1）2次式の場合

㋐ $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-\alpha)(x-\beta)}$ のとき

これは，みなさんよくご存知のもので

$\displaystyle\frac{a}{x-\alpha}-\frac{b}{x-\beta}$ とおき x の恒等式を作り，2文字について2つの連立方程式を解けば a，b が定まります．

$a=b=\dfrac{1}{\alpha-\beta}$ ですから，答えは

$$\frac{1}{\alpha-\beta}\log\left|\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right|$$

㋑ $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-\alpha)^2}$ のとき

これは部分分数に分ける必要はありませんね．
積分の公式から

$$=\frac{-1}{x-\alpha}$$

㋒ $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+a^2}$ のとき

これは，高校の段階では少しムリなのですが $\tan x$ の逆関数を用いれば次のようにできます．

$$=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

基本はこの3つだと思うのですが，実際にはいろいろ工夫して解かなければなりません．例えば

$$\int\frac{2x+9}{x^2+4x+5}dx$$

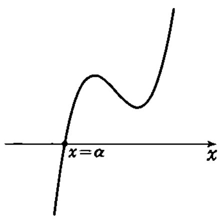
$$=\int\left\{\frac{2x+4}{x^2+4x+5}+\frac{5}{(x+2)^2+3}\right\}dx$$

$$=\log(x^2+4x+5)+\frac{5}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x+2}{\sqrt{3}}$$

などです．

2）3次式の場合

いま，3次関数を $y=f(x)$ とすると，そのグラフは，必ず x 軸を横切るのでそれを α とすると，$(x-\alpha)$ で因数分解できるので，実数解が1つの場合と2つの場合，3つの場合に分ければよいことになります．



㋐ $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}$ のとき

これは2次式の場合と同じようにして

$\displaystyle\frac{a}{x-\alpha}+\frac{b}{x-\beta}+\frac{c}{x-\gamma}$ とおけば，x の恒等式ができて，分子の次数は2次であるから，文字が3つに対して，方程式が3つであるから，a，b，c が定まります．

これは，生徒もよく知っていてだいたいできます．しかし，中には2次式のときのイメージが強いのか，2つの式の差にしないといけないように思っている生徒も案外多いのです．つまり，

$$\frac{ax+b}{(x-\alpha)(x-\beta)}-\frac{cx+d}{(x-\beta)(x-\gamma)}$$

とやってしまうのです．このあたりが，どうも経験的な気がします．やはり，3次のときの整理をしておいてやった方が親切だと思います．

基本は，「分母のL.C.M.が $(x-\alpha)(x-\beta)\times(x-\gamma)$ になっていること」「係数を決めるための式が何本あるか」の2つだと思います．

この２つが保険にかかっていれば，生徒は安心できるのだろうと思います．

④ $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-\alpha)(x-\beta)^2}$ のとき

これも㋐のことが理解できていれば，何でもないことです．

「分母のL.C.M.が $(x-\alpha)(x-\beta)^2$ になっていること」を考えて，

$$\frac{a}{x-\alpha}+\frac{b}{x-\beta}+\frac{c}{(x-\beta)^2}$$

とおけばよい．このとき，

$(分子)=a(x-\beta)^2+b(x-\alpha)(x-\beta)+c(x-\alpha)$

ですから，やはり，x の２次式です．すると，文字が３つに，方程式が３つですから，a，b，c は決定されます．

積分の答えは

$$a\log|x-\alpha|+b\log|x-\beta|-\frac{c}{x-\beta}$$

㋒ $\displaystyle\int\frac{dx}{(x-\alpha)(x^2+px+q)}$ のとき

最後は実数解が１つですから，２次の項は因数分解されません．これこそ，２つの式の差になりますから

$$\frac{a}{x-\alpha}+\frac{bx+c}{x^2+px+q}$$

分子は，x の２次式ですから，文字が３つに対して方程式が３つなので，a，b，c は決定されます．

ひとつ例題をやってみます．

(例) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3+1}$ を求めよ．

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

として，a，b，c を求めると

$a=\dfrac{1}{3}$，$b=-\dfrac{1}{3}$，$c=\dfrac{2}{3}$

また $\dfrac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}$

$$=-\frac{1}{6}\cdot\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

よって，答えは

$$\frac{1}{3}\log|x+1|-\frac{1}{6}\log(x^2-x+1)$$
$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

3) ４次式の場合

いよいよ４次式を考えるのですが，これは並たいていではありません．なぜならば，３次のように実数解が保証されている訳ではないからです．はて，どうしたらよいかと考えているときに，ヒントになったのは，以前に読んだことのある「数III方式　ガロアの理論」の中の“フェラリーの方法”で因数分解してみようと考えました．少し面倒くさいのですがガマンしてお付き合いください．

一般に $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ が与えられているとします．

３次の項を消すために，

$x=y-\dfrac{a}{4}$ とおくと

$y^4+py^2+qy+r=0$ とすることができる．

よって

$y^4=-py^2-qy-r$

ここで両辺の完全平方を作るために

$(y^2+t)^2=(4t-p)y^2-qy+(t^2-r)$

として，右辺の判別式を D とすると

$D=q^2-4(4t-p)(t^2-r)=0$ になるように実数 t を定めると（注．判別式は t の３次方程式であるから，そのような t は必ず存在する）

すると，右辺も平方式になるから

$(y^2+t)^2=(\sqrt{4t-p}\,y-\sqrt{t^2-r}\,)^2$

これから４次式は因数分解できることがわかったので，

y^4+py^2+qy+r

$=(y^2+t+\sqrt{4t-p}\,y\sqrt{t^2-r}\,)$

$\times(y^2+t-\sqrt{4t-p}\,y+\sqrt{t^2-r}\,)$

$=(y^2+Ay+B)(y^2-Ay+C)$

の形にすることができる．

したがって

$$\int\frac{dx}{x^4+ax^3+cx^2+d}$$
$$=\int\frac{dy}{y^4+py^2+qy+r}$$
$$=\int\left(\frac{Dy+E}{y^2+Ay+B}+\frac{Fy+G}{y^2-Ay+C}\right)dy$$

とすることができます．

ふ〜〜〜〜〜〜〜〜〜っ　少し疲れましたね．実際には高校生にはこんなことカンケイない訳ですけどつい，深入りしてしまうのが高校教師の悪いクセです．でも，4次式がどんな式でも2次式に因数分解されるあたりは，何だかとてもうれしい気持ちになってしまいます．

もし4次式に興味のある方は，いくつか計算してみてください．

（問）

(1) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4+1}$

(2) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4-5x^2+6x+3}$

(3) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4-8x^3+21x^2-16x-7}$

（京都府立 朱雀高等学校）

〈参考文献〉

「数III方式　ガロア理論」
（矢ケ部　厳　著　　　現代数学社）