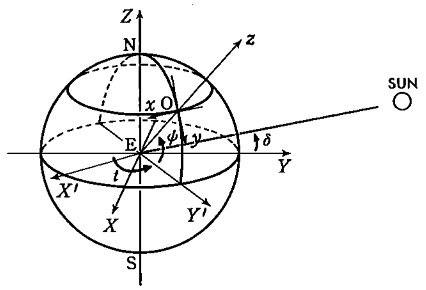
日時計の理論

坂本(さかもと) 茂(しげる)

1. 太陽の方向

地点Oの地平座標として天文学に習い原点Oの西方，南方，天頂をx軸，y軸，z軸の正の向きとする直交座標を用いる．また地球の中心Eを原点，太陽の向きをY軸，北極の向きをZ軸，地球の公転の向きをX軸とする地心座標を考える．緯度φの地点Oが太陽と反対側から自転した角をtとするとtはO地点の地方視太陽時であり，Y軸の負の方向から回転した角である．

この間の座標変換はZ軸の周りに$t-180°$回転した$X'Y'Z$座標を考え，X'軸を$\varphi-90°$回転させてXYZ座標からxyz座標の変換を得る．



$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & -\cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z+R \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\varphi & -\cos\varphi \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z+R \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\cos t & -\sin t & 0 \\ \sin\varphi\sin t & -\sin\varphi\cos t & -\cos\varphi \\ \cos\varphi\sin t & -\cos\varphi\cos t & \sin\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

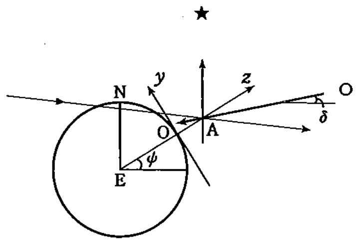
となりここでRは地球の半径である．この行列をMとおく．太陽の赤緯δとするとXYZ座標における太陽の方向ベクトル（方向余弦）は$(0,\ \cos\delta,\ \sin\delta)$であるから$xyz$座標での方向余弦$\lambda$，$\mu$，$\nu$は変換により

$$\begin{cases} \lambda=-\cos\delta\sin t \\ \mu=-\sin\varphi\cos\delta\cos t-\cos\varphi\sin\delta \\ \nu=-\cos\varphi\cos\delta\cos t+\sin\varphi\sin\delta \end{cases}$$

となる．

2. 影の曲線

地点Oの高さaの尖塔の先A$(0,\ 0,\ a)$の先を通る光線の方程式は$\dfrac{x}{\lambda}=\dfrac{y}{\mu}=\dfrac{z-a}{\nu}$である．これより$z=0$とおけばAの影Bの座標がえられ，さらに$t$を消去して，影の方程式がえられる．また次のように考えられる．地軸（Z軸）の方向余弦はxyz座標で$(0,\ -\cos\varphi,\ \sin\varphi)$であるが$(\lambda,\ \mu,\ \nu)$との内積は$-\mu\cos\varphi+\nu\sin\varphi=\sin\delta$となるからなす角は$90°-\delta$で$\delta$だけ（季節だけ）に関係する．



すなわちAを通る地軸に平行な直線を軸とする円錐面を光線は作る．したがってこの円錐面と地面の交わりとしてAの影Bは円錐曲線を描く，円錐面の方程式は内積から

$$\{y\cos\varphi-(z-a)\sin\varphi\}^2=\{x^2+y^2+(z-a)^2\}\sin^2\delta$$

であり，塔Aの地面に落ちる影は$z=0$とおき

$$(y\cos\varphi+a\sin\varphi)^2=(x^2+y^2+a^2)\sin^2\delta$$ である．

この2次曲線の離心率は$|\cos\varphi/\sin\delta|$であり

(1) $\delta=0$の彼岸のとき 直線 $y=-a\tan\varphi$

(2) $|\delta|=90°$のとき 定点$(0,\ a\cot\varphi)$

(3) $|\delta|+|\varphi|=90°$の(1)，(2)以外のとき放物線

$$x^2=2a(y-a\cot 2\varphi)\tan\varphi$$

(4) その他のときは有心2次曲線

$$\frac{\left(y+a\dfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^2\varphi-\sin^2\delta}\right)^2}{\left(a\dfrac{\sin\delta\cos\delta}{\cos^2\varphi-\sin^2\delta}\right)^2}-\frac{x^2}{\dfrac{a^2\cos^2\delta}{\cos^2\varphi-\sin^2\delta}}=1$$

となり $|\delta|+|\varphi|<90°$ で双曲線，$|\delta|+|\varphi|>90°$ で楕円となる．なお光線は地球を突き抜けた場合も含めた方程式である．

3. 天球上の太陽

太陽の方向余弦 λ，μ，ν によりO地点の地方視太陽時 t における太陽の方位A，高度hが

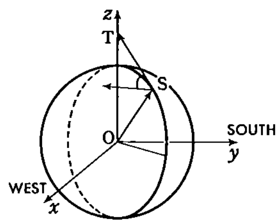
$$\tan A=\mu/\lambda,\ \sin h=\nu$$

としてわかる．$\nu\geqq 0$ のとき空に太陽があるときで日出，没時は $\nu=0$ のときであるからこのときの時刻 t_0 は $\cos t_0=\tan\delta\tan\varphi$ により求まる．また日出，没の方位は東西より北に角 $\sin^{-1}\dfrac{\sin\delta}{\cos\varphi}$ だけ離れた所である．

天球上を太陽が動く向きの方向余弦は $X'Y'$ 座標で $\cos t$，$\sin t$ であるから xyz 座標では

$$\cos t,\ \sin\varphi\sin t,\ \cos\varphi\sin t$$

である．太陽から天頂方向のZ軸に向かい天球に接するようなベクトルの方向余弦を λ'，μ'，ν' とすると



$$(\lambda,\ \mu,\ \nu)+k(\lambda',\ \mu',\ \nu')=\left(0,\ 0,\ \frac{1}{\nu}\right)$$

と書けるから $k=\dfrac{\sqrt{1-\nu^2}}{\nu}$ となり

$$\lambda'=\frac{\lambda}{k},\ \mu=\frac{\mu}{k},\ \nu=k\nu$$

であるが，これらのベクトルの内積を考えることで，天頂を通る大円を太陽が横切る角

$$\cos^{-1}\frac{\cos\varphi\sin t}{\sqrt{1-\nu^2}}$$

が求められる．これにより日の出の上昇角は地平線に対して $\cos^{-1}\dfrac{\sin\varphi}{\cos\delta}$ である．

4. 日時計

尖塔Aを通る光線の方程式はkを媒介変数として $x=\lambda k$，$y=\mu k$，$z=\nu k-a$ として表されるので $z=0$ とおきAの影の座標は $\mathrm{B}\left(a\dfrac{\lambda}{\nu},\ a\dfrac{\mu}{\nu}\right)$ としてえられる．δ を消去して xy の式を作ると

$$\frac{x}{a\cos\varphi\tan t}+\frac{y}{a\cot\varphi}=1$$

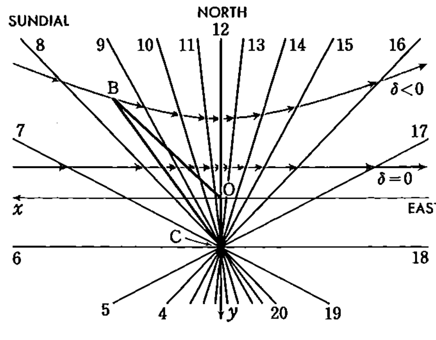
をえる．これは定点 $\mathrm{C}(0,\ a\cot\varphi)$ を通る直線であって，時刻が同じなら季節によらず同一直線上にAの影が落ちることを示している．これは太陽が季節によらずAを通り YZ 平面に平行な平面にあるのでこれと地面との交線としての直線であり直線CAの影である．日時計の原理は投影棒CAの影をこの放射線の文字盤から読み取ることである．

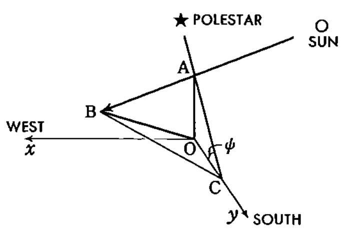
日時計は過去の遺物のように思えるが，1970年代初期から閏秒を入れている理由は地球自転の遅れのためであり日時計に時刻を合わせようとするものである．

実際に計算するのに太陽の赤緯 δ を知る必要がある．太陽は赤道面と $\varepsilon=23°27'$ の傾斜をもつ黄道上を1年に1周する．太陽黄経 Λ 太陽赤経 α とすると容易に

$$\sin\delta=\sin\varepsilon\sin\Lambda,\ \tan\alpha=\cos\varepsilon\tan\Lambda$$

となることがわかり δ の値を知ることができる．地方視太陽時 t と地方標準時との間には均時差があり最大17分である．その主な原因は軌道傾斜 ε の





ため α と Λ が一致しないことと，地球の楕円軌道のため Λ が時間に比例しないことにある．

東京 ($\varphi=35°40'$) で夏至または冬至 ($|\delta|=23°27'$) のとき影は離心率 2.04 の双曲線

$$\frac{(y+0.934a)^2}{0.531a^2}-\frac{x^2}{1.678a^2}=1$$

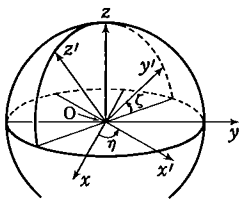
となる．この日東京で東西方向より約 30° の方角から約 40° の角度で太陽が昇る．

5. 壁に作る日時計

斜面にできる影を考えよう．xy 平面を η 回転させ，x 軸のまわりに yz 平面を ζ 回転させたときの座標を $x'y'z'$ とする斜面を考える．$\zeta=90°$ のとき垂直な壁である．

$$M'=\begin{pmatrix} \cos\eta & \sin\eta & 0 \\ -\cos\zeta\sin\eta & \cos\zeta\cos\eta & \sin\zeta \\ \sin\zeta\sin\eta & -\sin\zeta\cos\eta & \cos\zeta \end{pmatrix}$$

として



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=M'\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z+R \end{pmatrix}=M\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}=M'M\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}-M'\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix}$$

となる．ここで $L=M'M$ を

$$L=\begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix}$$

とおくと XYZ 座標で $\mathrm{A}(al_3,\ am_3,\ an_3)$ を通る光線の方向余弦が $(0,\ \cos\delta,\ \sin\delta)$ であるから光線は

$$X=al_3,\quad Y=am_3+k\cos\delta,\quad Y=an_3+k\sin\delta$$

$x'y'$ 平面は $l_3X+m_3Y+n_3Z=0$ で交点は

$$k=\frac{-a}{m_3\cos\delta+n_3\sin\delta}$$

のときで

$$x'=l_1X+m_1Y+n_1Z=(m_1\cos\delta+n_1\sin\delta)k$$
$$y'=l_2X+m_2Y+n_2Z=(m_2\cos\delta+n_2\sin\delta)k$$

よって $x'=-a\dfrac{m_1\cos\delta+n_1\sin\delta}{m_3\cos\delta+n_3\sin\delta}$,

$$y'=-a\frac{m_2\cos\delta+n_2\sin\delta}{m_3\cos\delta+n_3\sin\delta}$$

これで δ を消去すると

$$\tan\delta=-\frac{m_3x'+m_1a}{n_3x'+n_1a}=-\frac{m_3y'+m_2a}{n_3y'+n_2a}$$

から $\begin{vmatrix} m_2 & n_2 \\ m_3 & n_3 \end{vmatrix}x'+\begin{vmatrix} m_3 & n_3 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}y'=\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}a$

すなわち直線 $l_1x'+l_2y'=l_3a$ が文字盤の線である．

例えば東に面した壁では ($\eta=-90°$, $\zeta=90°$)

$y'=x'\tan\varphi+a\sec\varphi\cot t$ （x' は北方，y' は天頂）

となる平行線が日時計の文字盤となる．

影の方程式は地軸の単位ベクトル (n_1, n_2, n_3) と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(x',\ y',\ -a)$ のなす角が $90°-\delta$ であるから

$$(n_1x'+n_2y'-n_3a)^2=(x'^2+y'^2+a^2)\sin^2\delta$$

である 2 次曲線となる．

6. 1日の日射量

時刻 t_1 から t_2 まで単位面積が受けるエネルギーは太陽光線の入射角の余弦 ν を積分した値

$$\nu=\int_{t_1}^{t_2}\nu dt=(t_2-t_1)\sin\delta\sin\varphi$$
$$-\cos\delta\cos\varphi(\sin t_2-\sin t_1)$$

に比例する．日の出から日の入りまでの日射量は

$$t_0=\cos^{-1}\tan\delta\tan\varphi$$

であるので

$$U=(\pi-t_0)\sin\delta\sin\varphi+\cos\delta\cos\varphi\sin(\pi-t_0)$$

である．$x=\pi-t_0$ ($0\leqq x\leqq\pi$) とおくと

$$U=x\sin\delta\sin\varphi+\cos\delta\cos\varphi\sin x$$
$$=\sin\delta\cos\delta\frac{\sin x-x\sin x}{(1-\cos^2\delta\sin^2x)^{\frac{1}{2}}}$$

$|\varphi|+|\delta|\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であるから x で微分して

$$U'=\frac{\sin\delta\cos^3\delta\sin x}{2(1-\cos^2\delta\sin^2x)^{3/2}}(2x\tan^2\delta+\sin 2x)$$

となる．$f(y)=y\tan^2\delta+\sin y=0$ ($y=2x$) とおくと f だけで U' の符号が変わる．$f(y)=0$ の解はニュートン法

$$y_{n+1}=y_n-\frac{y_n\tan^2\delta+\sin y_n}{\tan^2\delta+\cos y_n}$$

により求められ，つづいて x，φ の値がわかる．

$$\frac{d\varphi}{dx}=\frac{\sin x\cos^2\varphi}{\tan\delta}>0\quad(\delta>0)$$

であるから U は x で増加なら φ でも増加である．

夏至 $\delta=\varepsilon=23°26'26''$ を例にとって計算すると，緯度が高くなるにしたがい1日の日射量が増し $\varphi=43°30'01''$ で極大になる．その後わずか減少し $\varphi=61°54'58''$ で極小になってから北極に近づくほど日射量は再び増していく．

なお $\varphi=90°-\varepsilon=66°33'34''$ の地点では連続的に増していくが，$|\varphi|+|\delta|\geqq\frac{\pi}{2}$ の白夜の地帯では

$$U=\pi\sin\delta\sin\varphi$$

であるから $\frac{dU}{d\varphi}=\pi\sin^2\delta\left(\varphi\to\frac{\pi}{2}-\delta\pm0\right)$ であり φ に対する U の増加率も両側で同じである．

次に U が φ に対して単調増加 ($\forall\varphi$: $U'\geqq0$) となる δ の最小値を求める．

$f'(y)=\tan^2\delta+\cos y=0$，$f(y)=y\tan^2\delta+\sin y=0$ を満たせばよい．

$\tan y-y=0$ の解であり Newton—Raphson 法

$$y_{n+1}=y_n+\frac{y_n-\tan y_n}{\tan^2 y_n},\quad \pi\leqq y\leqq\frac{3}{2}\pi$$

により計算すると $x_4=x_5=257.4534°$ となり緯度 φ が増すにつれて U が増していく最小の δ は $24°59'22''$ である．地球では δ の最大 $\varepsilon=23°26'$ であるから単調増加になることはない．

北極と赤道の日射量 U が等しいときは $\pi\tan\delta=1$ であるから $\delta=17°39'24''$ である．
太陽黄経 $\Lambda=49°41'$，$130°19'$ のときで5月11日，8月2日前後である．

緯度 φ の地域で日射量 U が最大になるときの δ は $\tan\varphi\tan\delta=-\cos\delta$，$2x\tan^2\delta+\sin 2x=0$ を満たせばよく $x+\tan x\tan^2\varphi=0$ を解けばよい．

$$x_{n+1}=x_n-\frac{\tan^2\varphi\tan x_n+x_n}{\tan^2\varphi\sec^2 x_n+1}$$

の反復法で求めると，緯度 $\varphi=35°40'$ の東京で日射量 U が極大になるときの太陽赤緯 $\delta=20°33'20''$ であり太陽黄経 $\Lambda=61°57'48''$ で5月23日頃である．この頃は北極より日射量がわずかに多いので日本の緯度地帯が世界で最も日射量が多い．

では，北極の日射量が他のどの地域よりも多くなる時季を求めてみよう．

$$x\sin\delta\sin\varphi+\cos\delta\cos\varphi\sin x=\pi\sin\delta$$

$2x\tan^2\delta+\sin 2x=0$，$-\cos x=\tan\delta\tan\varphi$ を解けばよい．まず δ を消去して

$$(x\cot x-\sin x)\sin\varphi=\pi\cot x$$

$$2x\cos^2 x+\tan^2\varphi\sin 2x=0$$

つづいて φ を消去して

$$(x^2-\pi^2)(1+\cos 2x)-x\sin 2x=0$$

この x を反復法で求める式を作ると

$$x_{n+1}=x_n+\frac{(\pi^2-x_n{}^2)(1+\cos 2x_n)+x_n\sin 2x_n}{2x_n+(2\pi^2-1-2x_n{}^2)\sin 2x_n}$$

となる．これは2，3回の繰り返しで $x=106.0166°$ が求められる．$\delta=20.7360°$ となり $\Lambda=62°52'50''$ の5月24日頃である．またこのときに $\varphi=36°05'05''$ の緯度地帯では北極点と1日の日射量が同じとなる．

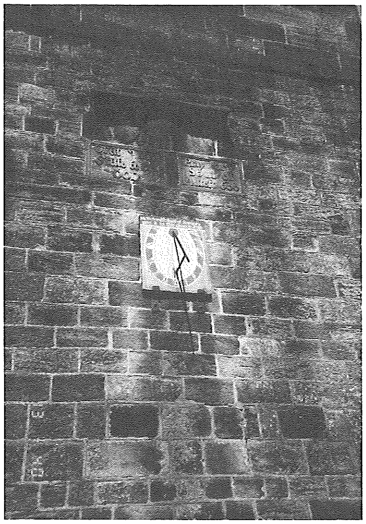
筆者は1日の日射量の季節 (Λ) による変化や年間の日射量の緯度 φ による変化などを計算した．その一例として，東京での1日の日射量の季節変化は

$$716+237\sin\Lambda+14\cos 2\Lambda+\cdots\cdots(\text{カロリー}/\text{cm}^2)$$

のように，Fourier 級数で表した．周期性もわかりやすいし，この種の関数は $\sin^n x$ の級数で表すより $\sin nx$ の級数のほうが誤差が小さい．

以上は大気を考慮していない．実際は大気の影響は無視できないほど大きいので夏に北極の日射量が最大にならないが，真夏には高緯度が非常に温められることがわかるのである．

(東京都立 鷺宮高等学校)



「'嵐が丘' ブロンテ家前の教会の日時計 (夏時間)」