デルトイド一考　——シムソン線との不思議な関係

松田(まつだ)　康雄(やすお)

1. はじめに

定円にその3分の1の半径の円が内接して定円内を1周するとき，動円の周上の定点の軌跡は，3つの尖点をもつデルトイドになる．

また，三角形の外接円の周上の点から，三角形の3辺に下ろした3つの垂線の足は一直線上にあり，その直線はシムソン線と呼ばれる．

これら一見異質な2つの図形の間には，次のような関係がある．

定理． シムソン線の包絡線はデルトイドである．

本稿では，この定理を証明する．

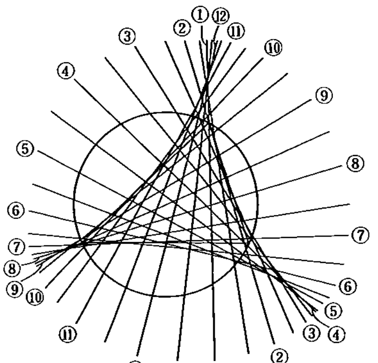

図1

図1は，三角形の外接円の円周を24等分した各点におけるシムソン線をかいたものである．円周上時計の目盛りに対応する点におけるシムソン線に目盛りの数字をつけている．浮き出た曲線がデルトイドである．

2. シムソン線の性質

補題1． 三角形の外接円O上の2点S，Tにおける2つのシムソン線のなす角度は $\angle SOT$ の半分の大きさである．

証明． 図2において，l，m はそれぞれ点S，Tにおけるシムソン線である．SAの円周角，および4点A′，C′，S，Bが共円であることから

$$\angle SS'A = \angle SBC'$$
$$= \angle SA'C'$$

が成り立ち

(シムソン線 l)∥(線分 AS′)　…… (1)

となる．同様に　(シムソン線m)∥(線分 AT′)

となるから，これと $\overset{\frown}{ST} = \overset{\frown}{S'T'}$ より

(l とmのなす角)$= \angle S'AT'$

$$= \frac{1}{2}\angle S'OT' = \frac{1}{2}\angle SOT$$ 終

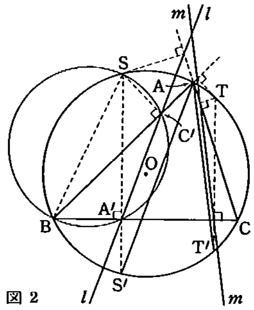

図2

補題2． 三角形の外接円の周上の点Sにおけるシムソン線は，三角形の垂心Hと点Sの中点を通る．

証明． 図3において，Qは直線SD′と辺BCの交点，S″は直線HQと直線SA′の交点とする．

CD′の円周角とCの余角から

$$\angle CBD' = \angle CAD'$$
$$= \angle CBH$$

が成り立つので

$$\triangle BDH \equiv \triangle BDD'$$

よって DH＝DD′ となり，△QHD′ と △QSS″ はそれぞれ二等辺三角形となる．これから

$$\angle D'HS'' = \angle HS''S = \angle S''SD' = \angle S'AD'$$

となり，(1)から

(線分 HS″)∥(線分AS′)∥l

となる．A′ は線分 SS″ の中点であるから，シムソ

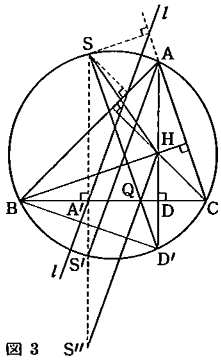

図3

ン線 l は，線分 HS の中点を通る． 終

補題 3． 九点円の中心を通るシムソン線がある．

証明． △ABC の九点円の中心Nは外心Oと垂心Hの中点である．図 4 において円Oの周上に点Sを $\overset{\frown}{AS}=2\overset{\frown}{SR}$ となるようにとる．点Aにおけるシムソン線は直線 AH であるから，点Sにおけるシムソン線を l とおくと，補題 1 から

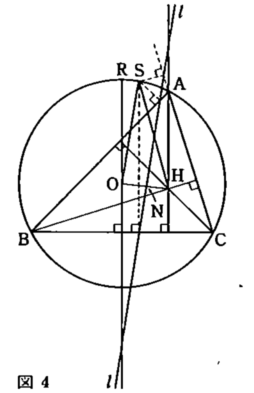

図 4

$$\angle SOR=\frac{1}{2}\angle AOS$$

$=$(シムソン線 l と直線 AH のなす角)

$=$(シムソン線 l と直線 OR のなす角)

よって　(直線 l)$/\!/$(線分 OS)

となる．補題 2 から，シムソン線 l は，線分 HS の中点を通るので，線分 HO の中点Nを通る． 終

3. 定理の証明

与えられた三角形の外接円Oの周上の点 S，T におけるシムソン線をそれぞれ l，m とおく．ただし，l は九点円の中心Nを通るものとする．l，m と九点円Nとの交点をそれぞれ A，B；E，F とおき，l と m の交点をUとおく．

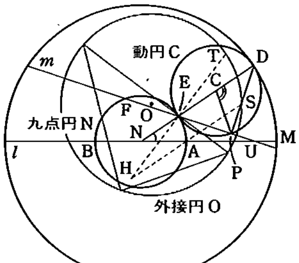

図 5　大円N

九点円Nの半径は外接円Oの半分で，垂心Hは 2 円 N，O の相似の中心になる．補題 2 から，点 A，E はそれぞれ線分 HS，HT の中点であるから

$$\overset{\frown}{ST}=2\overset{\frown}{AE}$$

これと補題 1 から

$$\angle EUN=\frac{1}{2}\angle TOS=\frac{1}{2}\angle ENU \quad \cdots\cdots (2)$$

次に，大円Nの半径は九点円Nの半径の 3 倍とする．円Cは中心Cが直線 NE 上にあり半径が九点円Nと等しく，大円Nと点Dで接するとする．直線 m と円Cの交点でEでない方をPとおくと，(2)から

$$\angle PCD=2\angle PED=2\angle FEN$$
$$=2(\angle ENU+EUN)=3\angle DNU$$

したがって，直線 l と大円Nの交点で点Aと同じ側にあるものをMとおくと，$\overset{\frown}{DM}=\overset{\frown}{PD}$ が成り立つので，点Pは大円Nに内接するデルトイド上の点である．

ここで，円Cが点Dを通る瞬間の回転の中心は点Dであることと (線分 PD)$\perp m$ から，シムソン線 m は点Pにおけるデルトイドの接線になる．

逆に，図 5 において，l は点Sにおけるシムソン線で九点円の中心Nを通るとし，m はデルトイド上の点Pにおける接線とする．

$\overset{\frown}{TS}=2\overset{\frown}{EA}$　より　$\angle ENA=\angle TOS$

$\overset{\frown}{DM}=\overset{\frown}{PD}$　より　$\angle DCP=3\angle DNM$

であるから

(直線 l と m のなす角)$=\angle EUN$

$=\angle FEN-\angle ENA=\angle CEP-\angle TOS$

$=\dfrac{1}{2}\angle DCP-\angle TOS$

$=\dfrac{3}{2}\angle ENA-\angle TOS=\dfrac{1}{2}\angle TOS$

更に接線 m は，線分 HT の中点Eを通るので，点Tにおけるシムソン線である．

曲線の接線の包絡線はその曲線自身なので，定理が示された． 終

4. おわりに

元名古屋大学教授の栗田稔先生がある本の中で，「円周角の定理は初等幾何学の女王である」と書かれていたが，本稿の補題や定理の証明は，この円周角の定理に大きく支えられている．

定理の証明は，複素数を用いてもできる．本稿ではデルトイドの構造やシムソン線とのつながりを具体的に見たいと思って，初等幾何学によって示した．

シムソン線とデルトイドが結び付くことは，説明はできてもやはり不思議な感じがする．

(参考文献)

[1] 岩田至康，幾何学大辞典 6，槙書店，1986，379-381．

[2] H．コークスター，S．グレイツァー，幾何学再入門，河出書房，1970，64-71．

[3] 小林幹雄，包絡線，文修堂，1949，114-116．

(福岡県 明治学園高等学校)