三角関数の加法定理のある簡単な証明について

仁平（にへい） 政一（まさかず）

1. はじめに

大多数の教科書で扱われている三角関数の加法定理の証明は「線分の長さは回転に関して不変である」ということなどを利用している．そのため，例えば $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2$ や $\{1-\cos(\alpha-\beta)\}^2+\{0-\sin(\alpha-\beta)\}^2$ などの計算が必要となる．

これらの計算は，一見繁雑そうに見えるので（実際はやさしい計算なのだが），加法定理の証明は難しいと感じる生徒が意外に多い．そこで，線分の長さを利用しない証明を工夫してみた．以下，このことについて報告しよう．

2. $\sin(\alpha+\beta)$ と $\sin(\alpha-\beta)$ の証明

最初に，加法定理の別証を思いついたきっかけについて述べよう．

図1の三角形 ABC において，辺 AM の長さを求めるには，面積を利用するのが通例であろう．

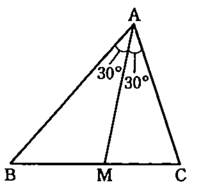

図1

いま，この問題を一般化し，図2のように，AB $=c$，AC $=b$，$\angle$BAM $=\alpha$，$\angle$CAM $=\beta$，AM $=x$ とし，AM の長さを求めるための式をつくると，$\triangle$ABM $+\triangle$ACM $=\triangle$ABC から

$$\frac{1}{2}cx\sin\alpha+\frac{1}{2}bx\sin\beta$$
$$=\frac{1}{2}bc\sin(\alpha+\beta)$$

となるが，どことなく正弦の加法定理に類似している．

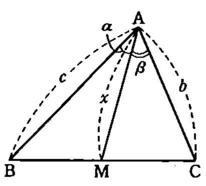

図2

そこで，図2を特殊化し，AM⊥BC の場合を考えると自然に正弦の加法定理が得られる．

このようにして，正弦の加法定理の別証を思いついたわけである．それでは，この別証についてきちんと述べてみよう．

いま $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$ とする．この条件のもとで任意に与えられた角 α，β に対して図3のような三角形 ABC を作る．

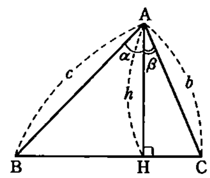

図3

このとき，三角形 ABC の面積に着目すれば

$$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{ABH}+\triangle\mathrm{ACH}$$

が成り立つ．よって

$$\frac{1}{2}bc\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}ch\sin\alpha+\frac{1}{2}bh\sin\beta$$

を得る．この式の両辺を $\frac{bc}{2}$ で割れば

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{h}{b}\sin\alpha+\frac{h}{c}\sin\beta$$

ここで $\frac{h}{b}=\cos\beta$，$\frac{h}{c}=\cos\alpha$ に注意すれば

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

が得られる．

次に，$\sin(\alpha-\beta)$ の加法定理を導こう．そこで $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$ $(\alpha>\beta)$ と仮定する．

与えられた角 α，β に対して図4のような三角形を作る．

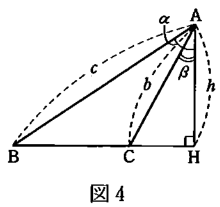

図4

$\triangle ABC = \triangle ABH - \triangle ACH$ から

$$\frac{1}{2}bc\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}ch\sin\alpha-\frac{1}{2}bh\sin\beta$$

を得る．ゆえに

$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{h}{b}\sin\alpha-\frac{h}{c}\sin\beta$$

いま，$\frac{h}{b}=\cos\beta$，$\frac{h}{c}=\cos\alpha$ に注意すれば

$$\boldsymbol{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$$

が得られる．

余弦の加法定理は　$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，$0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$ として，等式

$$\cos(\alpha+\beta)=\sin\left\{\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right\}$$

を利用することにより得られる．

なお，ある 2 つの角 α，β について正弦，余弦の加法定理が成り立てば，α，β の一方が $\frac{\pi}{2}$ だけ増減した角について正弦，余弦の加法定理が成り立つので，この手続きを繰り返せば，α，β が任意の大きさで加法定理が成り立つことがわかる．

さて，上述の証明で用いたのは，三角比の定義と，新教育課程での数学 I でも，取りあげられている三角形 $\triangle ABC$ の面積に関する公式

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

である (ここで，$AB=c$，$BC=b$ とした)．

したがって，上述の証明は，新教育課程でも取りあげることができよう．

3. おわりに

実際の授業 (2 年生の基礎解析の授業) では，教科書 (文献[1])にそった証明を与えた後，別証として与えた．視覚的に証明を追うことができることと，そこに用いられる論法が数学 I で学んでいることなどから，生徒の反応はよかった．

$\sin(\alpha-\beta)$ の証明に関しては，生徒自身が図 4 に気づき，証明がつけられるようにしむけた．

こちらのねらいどおり，何人かの生徒が，その証明を成し遂げることができた．

これを機に，新しい定理や公式を学んだとき，その別証などに挑んでくれる生徒がでてくれれば，などと願っているのだが．

さて，「Do Math で数学を楽しもう」という言葉を耳にする．数学は本来楽しいものであるが，出来上がった定理や公式の羅列を見て，あるいは解説を聞いて楽しむことは不可能であろう．

数学を楽しむためには，それらの生成の過程に参加する必要がある．

授業の中で，生徒達とともに，新しい定理や公式を発見することは不可能に近いが，既に知られている定理や公式でも，その生成の過程に生徒を参加させ，社会的に「再発見」でも，生徒にとっては「原発見」となるようなことが，場合によっては可能であろう．

もちろん，そのためには「類推，一般化・特殊化，総合化，抽象化，帰納的，演繹的」などの手法を用いなければならず，時間的なロスが生じる．しかしこれらは数学的な大切な考え方であり，創造力を養うことにもつながる．また，これこそ「Do Math」の大切なねらいの 1 つであろう．

年に何度か，そのようなことを試みたいと思っているが，授業の効率化などを考えると，難しいのが現状である．なお，上述の別証の実践にあたっては「Do Math」の精神を念頭においた．

参考文献

[1]　高等学校　基礎解析　四訂版　数研出版

[2]　I. Ashiba, Some Formulas of Elementary Trigonometry, 初等数学 (早川学而個人研究誌) 20 号 (1990, 9) p.51〜53.

(茨城県立 藤代高等学校)