「高校数学」という文化

鈴木（すずき）　雅之（まさゆき）

1. はじめに

'数学の世界'，'数学という文化'（その面白さや美しさ）は，なにも大学等で，数学の最先端の研究を続けている一部の先生方の手の内にのみあるのではなく，例えば，高等学校には，'高校数学という文化'が存在する．

それは，今世紀の初め（大正時代），中央のアカデミーに対して色々な分野で民間学が台頭し，わけても民俗学はその方法も含めて，その後の学界に確固たる位置を示していくことになる等のプロセスを想起させなくもない．

高校数学の面白さ（美しさ）と言えば，simple な様式美（形式）．図形の美．各単元間，各問，各解答間の analogy，Text の行間にいくらでも感じられる metaphor，際限の無い別解の存在，等であろうか．一般に，芸術畑の人々が尊び，喜ぶ内容も一絵画であれ文学であれ一様式美であり，analogy であり，様々な metaphor であり，色々な解釈，なのではなかろうか．要するに，高校数学の喜びと同一のもの．

高校の数学の問題を解き，多くの別解が列挙される．このプロセスと成果，必然的に現れるアナロジー．これらには，'高校数学という文化'の存在の証左となる美感や面白さを誘発する何物かが含まれているように見える．

2. 別解群の一例と別解指導の可能性

> **問A**：$\{x^2+y^2=1 \cdots ①,\ 3x+4y=k \cdots ②\}$ のとき，k の最大値を求めよ．

（そのときの，x，y の値は，特に求めない）

解1　②を①に代入して得られる 2 次方程式の実根条件（必要十分条件）から求める．

解2　直線②の y 切片は $k/4$．ゆえに，直線②が円①に接するときの k の値が，求める最大値（または最小値）．これは解1の 2 次方程式の重解条件（必要十分条件）から求めるともいえる．

解3　直線②と円①（半径：1）とが接するための必要十分条件は，点（原点）と直線（②）の距離（$=1$）の公式を用いても得られる．

解4　円 $x^2+y^2=r^2$ に接する傾き m の接線の方程式は $y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$　これに，①，②から $r=1$，$m=-3/4$ を代入して，直線②の y 切片（$=k/4$）を計算して得られる．

解5　円 $x^2+y^2=r^2$　上の点 $(x_0,\ y_0)$ に引いた接線の方程式は $x_0x+y_0y=r^2$　ゆえに円①と直線②の接点の座標を $(a,\ b)$ とすると，

$ax+by=1$　と　$3x+4y=k_{max}$（または k_{min}）は同値．ゆえに $ak_{max}=3$，$bk_{max}=4$

これと $a^2+b^2=1$ より求める．

解6　直線②が円①に接する図から，接点の座標を $(a,\ b)$ とすると，$a:b:1=3:4:5$（三平方の定理より）　ゆえに $a=3/5$，$b=4/5$

これから求める．

解7　直線②を原点の周りに θ 回転させて得られる直線の方程式は

$3(x'\cos\theta+y'\sin\theta)+4(-x'\sin\theta+y'\cos\theta)=k$

$\therefore$　$(3\cos\theta-4\sin\theta)x'+(3\sin\theta+4\cos\theta)y'=k$

この直線が $y'=1$ であるなら，直線②は円①に接していたことになるから，

$3\cos\theta-4\sin\theta=0$，$3\sin\theta+4\cos\theta=k$

が，k が最大値をとるための必要十分条件．これから求める．

解8　$(3,\ 4)=\vec{a}$，$(x,\ y)=\vec{b}$ とおき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると，$k=3x+4y=\vec{a}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta=5\cos\theta$ から求める．

解9　絶対不等式（Schwarz or Cauchy）

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqq(ax+by)^2$$

に $a=3$，$b=4$，$x^2+y^2=1$ を代入して求める．

解10 （栃木高・柳田五夫氏より）

①から，$(3x+4y)^2+(4x-3y)^2=25(x^2+y^2)=25$

ゆえに $(3x+4y)^2$ の最大値は $4x-3y=0$ のときに 25 をとる．

解11 ①と $\{x=\cos\theta,\ y=\sin\theta\}$ $(0\leqq\theta\leqq2\pi)$ は同値．ゆえに $k=3x+4y=3\cos\theta+4\sin\theta$

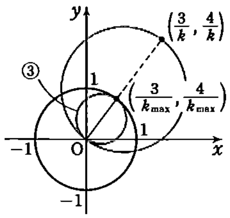
$=5\sin(\theta+\alpha)$ から求める．

解12 ①，②から $3x+4y=k(x^2+y^2)$

$\therefore\ \ x(x-3/k)+y(y-4/k)=0$ （$\because\ \ k_{\max}\neq0$）

これは，原点 $(0,\ 0)$ と，点 $(3/k,\ 4/k)$ を直径の両端にもつ円の方程式．

ゆえに，円①と共有点をもつ半径の最小の円③を考えれば，k の最大値が求められる．

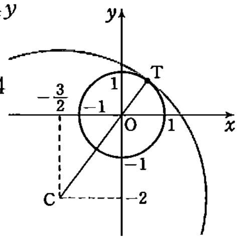


解13 ①，②から $k=3x+4y$

$=3x+4y+x^2+y^2-1$

$=(x+3/2)^2+(y+2)^2-29/4$

ここで，円①上の点 $(x,\ y)$ を使って，上式の最大値を求めると，右図により



$\overline{\mathrm{CT}}^2-29/4$

$=\{\sqrt{(-3/2)^2+(-2)^2}+1\}^2-29/4=5$

解14 ②を①に代入して求めると

$k=3x\pm4\sqrt{1-x^2}$

微分法により k の増減を調べると，求められる．

解15 ①，②ともに両辺を x で微分すると，それぞれ，$2x+2yy'=0$ …… ①′，$k'=3+4y'$ …… ②′

②′ で $k'=0$ のとき $y'=-3/4$ となるから，これを①′ に代入すると，$x=\pm3/5$，$y=\pm4/5$（複号同順）．これと②′ より k の増減を調べると

x	$0\ (4/5<y<1)$	$3/5\ (y=4/5)$	$1\ (0<y<4/5)$
k'	$+$	0	$-$
k	↗	5	↘

解16 （湘南工大附高・福島浩氏より）

$\varphi(x,\ y)=x^2+y^2-1$，$f(x,\ y)=3x+4y$ とおき，$\varphi(x,\ y)=0$ の下で，$f(x,\ y)$ の最大値を求める（Lagrange の未定乗数法）．

解17 （栃木高・柳田五夫氏より）

①，②から，$k^2=(3x+4y)^2/(x^2+y^2)$

1）$x=0$ と 2）$x\neq0$ に分け $y/x=t$ で

$k^2=16+(24t-7)/(1+t^2)$

これから，微分法で，k^2 の増減を調べる．

または分母を払って，t の実数条件をとってもよい．また，上の観点から，$k=(3x+4y)/\sqrt{x^2+y^2}$，$y/x=t$ とおいても同様な解法．

解18 （栃木高・柳田五夫氏より）

①より，点 $(0,\ -1)$ を除いては

$x=2t/(1+t^2)$，$y=(1-t^2)/(1+t^2)$ と置換できるから

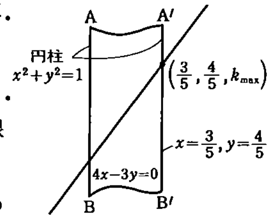
$3x+4y=(-4t^2+6t+4)/(t^2+1)$

この後は，**解17** と同様に．

解19 x-y-k 空間で，円柱①と平面②を考える．

原点を通る平面②の法線ベクトルは $(3,\ 4,\ -1)$

ゆえに，k 軸に平行かつ



原点を含む平面で，平面②に垂直な平面の方程式は $4x-3y=0$ …… ③ ゆえに 円柱①と平面③の交線（k 軸に平行）の方程式は，③式を①式に代入して，$(x=\pm3/5,\ y=\pm4/5,\ k)$（複号同順）

これを②式に代入して k の最大値が求められる．

解20 $3x+4y=\dfrac{3x+4y}{\sqrt{3^2+4^2}}\times5=5X$ とおくと，X は直線 $3x+4y=0$ と点 $(x,\ y)$ との距離．

（$\because\ \ 3x+4y>0$）

円①上の点 $(x,\ y)$ から，原点を通る直線 $3x+4y=0$ までの距離 X の最大値は明らかに 1

ゆえに，求める最大値は 5

（これは **解3** と似ているが，スタートの発想が異なるので，別解としてカウントしたい．こちらの方は，意外な程，応用範囲が広い．）

解21 重解条件を求める観点（解 2 と同じ）から，②を①に代入して得られる 2 次方程式を，次式とおく．$25x^2-6kx+k^2-16=25(x-\alpha)^2$

恒等式の係数比較から $3k=25\alpha$，$k^2-16=25\alpha^2$

α を消去して $k=\pm5$（解 2 に対して，これを別解としてカウントする理由は，高次方程式等で判別式による重解条件が使えない場合があるため．）

解22 ①，②から $\begin{pmatrix}x & y\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ k\end{pmatrix}$

円①と直線②とが接するための必要十分条件は

$\varDelta=4x-3y=0$

これと $x^2+y^2=1$ より求められる．

(これは，解5と全く同じであって，カウントしたくないのだが，初めの形と逆行列のイメージが面白いので，敢えて掲げておく.)

☆紙面の冗長を避けるため，‘問’も表現の一般性を避け，略解も，ごく大雑把なものとした．

しかし，いかがなものであろうか．よく知られた普通の問題，単純で易しい問題．対する別解の群．

実数条件，重解条件，点と直線の距離，接線の諸公式，初等幾何（相似比），行列（回転），ベクトル（内積），絶対不等式，変数変換（三角関数，極座標，特殊な変換），式の変形（単位元の性質），微分法（陽関数，合成関数，偏微分），次元の変化（＋1），実数の性質と乗法公式，座標軸の変換，恒等式の性質，行列の性質，分子分母の次数をそろえる方法，等．高校数学総出演の感がないであろうか．愉快ではなかろうか．

ところで，これらの，見掛け上ではあるが別解の群は，単に‘この問’のみがもつ‘解釈’の群なのであろうか．次問では変数を１つ増してみた．

> **問B**：$\{x^2+y^2+z^2=1$ … ①，$3x+4y+5z=k$ … ②$\}$ のとき，k の最大値を求めよ．

(以下の解の番号は，問Aのそれに対応している)

解1 ②を①に代入すると

$$34x^2+2(12y-3k)x+41y^2-8ky+k^2-25=0$$

ここで，x の実数条件をとると

$$50y^2-8ky+k^2-34\leqq 0$$

この左辺を $f(y)=50(y-2k/25)^2+17k^2/25-34$ とおくと，$f(1)=(k-4)^2$，$f(-1)=(k+4)^2$ で，$-1<(2k/25)<1$ は納得（∵ $k=3x+4y+5z<12$）できるから，$f(y)=0$ の y の実根条件で十分である．これから求められる．

解2 球面①と平面②が接するときの k の値を求めればよいから，**解1**の初めの方程式が重解をもてばよい．その判別式を D とすると

$$D/4=(12y-3k)^2-34(4/y^2-8ky+k^2-25)=0$$

ゆえに $50y^2-8ky+k^2-34=0$

これを満たす実数 y も重解でなければならないから，もう１回判別式をとる．

解3 平面②と球面①とが接するための必要十分条件は点（原点）と平面（②）の距離の公式からも得られる．

解4 球面 $x^2+y^2+z^2=r^2$ に接する，法線ベクトル $(a,\ b,\ c)$ の平面の方程式は

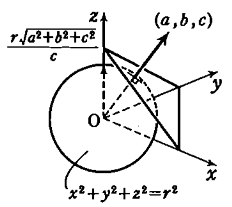
$$ax+by+cz\pm r\sqrt{a^2+b^2+c^2}=0$$

軸上の切片を計算して

求められる．

解5 球面 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 上の点 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ で接する平面の方程式は

$x_0x+y_0y+z_0z=r^2$



よって，球面①と平面②の接点の座標を $(a,\ b,\ c)$ とすると，$ax+by+cz=1$ と

$3x+4y+5z=k_{\max}$（または $k_{\min}$）は同値．

∴ $ak_{\max}=3$，$bk_{\max}=4$，$ck_{\max}=5$

これらと，$a^2+b^2+c^2=1$ とから求められる．

解6 平面②が球面①に接する図から，接点の座標を $(a,\ b,\ c)$ とすると

$$a:b:c:1=3:4:5:\sqrt{3^2+4^2+5^2}$$

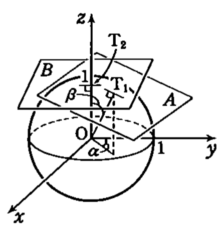
（∵ 平面②の法線ベクトルは $(3,\ 4,\ 5)$）

$$\therefore\ k_{\max}=3\times 3/\sqrt{50}+4\times 4/\sqrt{50}+5\times 5/\sqrt{50}$$
$$=5\sqrt{2}$$

解7 接平面の運動（合同変換）を考える．これは回転の変換を２回続けてやるだけ，要するに合成変換であって，生徒にもやれるもの．

$$x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha$$
$$y'=x\sin\alpha\cos\beta+y\cos\alpha\cos\beta-z\sin\beta$$
$$z'=x\sin\alpha\sin\beta+y\cos\alpha\sin\beta+z\cos\beta$$

によって，平面②（右図A）が平面 $z=1$（右図B）に移ったとすると ※



$$z'=(\sin\alpha\sin\beta)x+(\sin\beta\cos\alpha)y+z\cos\beta=1$$

これは $3x+4y+5z=k_{\max}$ と同値でなければならないから，$k_{\max}\sin\alpha\sin\beta=3$，

$k_{\max}\sin\beta\cos\alpha=4$，$k_{\max}\cos\beta=5$

これらから α，β を消去して $k_{\max}{}^2=50$

※　接点 $T_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ を平面 $z=z_1$ 内で点 $(0,\ 0,\ z_1)$ を中心に α 回転し，yz 平面上の点に移ったところで，同平面内で，原点中心に β 回転すると T_2 に移る．この変換は

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta\\ 0 & \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\alpha\sin\beta & \sin\beta\cos\alpha & \cos\beta\end{pmatrix}$$

で求められるが，高校生なら，それぞれ z と x を固定して2回の変換を 2×2 行列の積で処理すればよい．

解8　$(3,\ 4,\ 5)=\vec{a}$，$(x,\ y,\ z)=\vec{b}$ とおき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$k=3x+4y+5z=\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$=5\sqrt{2}\cos\theta$　（∵　①から）

∴　$k_{\max}=5\sqrt{2}$　（∵　$\theta=0$ は可）

解9　絶対不等式 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$

$\geqq(ax+by+cz)^2$ から

$-5\sqrt{2}\leqq3x+4y+5z\leqq5\sqrt{2}$

（等号は $x:y:z=3:4:5$ のとき）

解10　$(3x+4y+5z)^2+(4x-3y)^2+(5y-4z)^2$

$+(3z-5x)^2=50(x^2+y^2+z^2)=50$

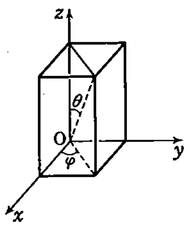
∴　$-5\sqrt{2}\leqq3x+4y+5z\leqq5\sqrt{2}$

（∵　$4x-3y=5y-4z=3z-5x=0$ が可）

解11　3次元の極座標で，$r=1$ として，

$x=\sin\theta\cos\varphi$，$y=\sin\theta\sin\varphi$，

$z=\cos\theta$ とおくと



$3x+4y+5z=3\sin\theta\cos\varphi$

$+4\sin\theta\sin\varphi+5\cos\theta$

$=(3\cos\varphi+4\sin\varphi)\sin\theta$

$+5\cos\theta$

$=5\sin(\varphi+\alpha)\cdot\sin\theta+5\cos\theta$

$=5\sqrt{1+\sin^2(\varphi+\alpha)}\cdot\sin(\theta+\beta)$　$\begin{pmatrix}0\leqq\varphi<2\pi\\ 0\leqq\theta<\pi\end{pmatrix}$

∴　$(3x+4y+5z)_{\max}=5\sqrt{2}$

（重要だが，細かい押さえを省略）

解12　①，②から $3x+4y+5z=k(x^2+y^2+z^2)$

∴　$x(x-3/k)+y(y-4/k)+z(z-5/k)=0$

（∵ 問題から $k\neq0$ と考えられる）

上式は，原点 $(0,\ 0,\ 0)$ と点 $(3/k,\ 4/k,\ 5/k)$ を直径の両端にもつ球面の方程式．ゆえに，球面①と共有点をもつ半径の最小の球から k の最大値が求められる．

∴　$(3/k_{\max})^2+(4/k_{\max})^2+(5/k_{\max})^2=1$

∴　$k_{\max}=5\sqrt{2}$　（∵　$k_{\max}>0$）

解13　①，②から，次式とおく．

$k=3x+4y+5z+x^2+y^2+z^2-1$

$=(x+3/2)^2+(y+2)^2+(z+5/2)^2-54/2$

$=r^2-54/4$

ここで，球面①上の点 $(x,\ y,\ z)$ を使って，r^2 の最大値を求めると

$(r_{\max})^2=\{\sqrt{(-3/2)^2+(-2)^2+(-5/2)^2}+1\}^2$

$=(54+4\sqrt{50})/4$

∴　$k_{\max}=(r_{\max})^2-54/4=5\sqrt{2}$

解17　①，②から

$k^2=(3x+4y+5z)^2/(x^2+y^2+z^2)$

1)　$x=0$ のとき，2元の問題となり k の最大値は $\sqrt{41}$　（既に22通りの解法を提示）

2)　$x\neq0$ のとき，$u=y/x$，$v=z/x$ とおくと

$k^2=(3+4u+5v)^2/(1+u^2+v^2)$

∴　$(16-k^2)u^2+2(12+20v)u$

$+(25-k^2)v^2+30v+9-k^2=0$

上式で，u の実根条件をとると（u，v は互いに独立）　$(41-k^2)v^2+30v+25-k^2\geqq0$

これを成り立たせる（u を実数とさせる）実数 v の存在の必要十分条件は

i）　$41-k^2<0$ のとき　$41<k^2\leqq50$

ii）　$41-k^2\geqq0$ のとき　$0\leqq k^2\leqq41$

以上，1)，2) から，k^2 の最大値は50

解20　$3x+4y+5z=\dfrac{3x+4y+5z}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}}\times\sqrt{50}=\sqrt{50}\,X$

とおくと，X は平面 $3x+4y+5z=0$ と点 $(x,\ y,\ z)$ との距離．（∵　問題から $k>0$ と考えられる）

球面①上の点 $(x,\ y,\ z)$ から平面 $3x+4y+5z=0$ までの距離の最大値は1.

ゆえに，求める最大値は $\sqrt{50}$

☆再び，いかがなものであろうか．高校生のレベルで鮮やかなアナロジーが浮き出たように思われる．美しいといえば，美しいのではなかろうか．しかし筆者の横着な不勉強により，初めの22通りが，15通りに減ってしまった（微分法のものなど，形式的には可能で，残念）．解19, 21にしても，人を変えれば簡単に適用してしまうかもしれない．だが反面，こんなに鮮やかに適用できたのか！　という驚きはないであろうか？

さて，もう1問，姿を変えた問に初めの解答群を

適応させてみよう．

> 問 C：$\{x^2+y^2=1 \cdots ①,\ x^2-2\sqrt{3}\,xy-y^2=k \cdots ②\}$ のとき，k の最大値を求めよ．

解1 ②は $k \neq 0$ なら双曲線．①を②に代入して，x のみの整式に整理すると

$$16x^4-4(k+4)x^2+(k+1)^2=0$$

$$\therefore\ x^2=\{2(k+4)\pm\sqrt{48-12k^2}\}/16$$

ここで，$2(k+4) \geqq \sqrt{48-12k^2}$ が確認できるから，x の実数条件（必要十分条件）は $48-12k^2 \geqq 0$

$$\therefore\ -2 \leqq k \leqq 2$$

（この後 $k=2$ のときの x，y の存在確認）

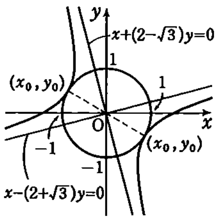
解5 ②式は $k=(x-\sqrt{3}\,y)^2-4y^2$

$$=(x-\sqrt{3}\,y-2y)(x-\sqrt{3}\,y+2y)$$

これは $k=0$ で 2 直線，$k \neq 0$ で双曲線．

円①と双曲線②とが接するとき，k は最大値をとるから，その接する条件を求める．

接点の座標を $(x_0,\ y_0)$ とすると，接線の方程式は，①，②から，それぞれ



$$x_0x+y_0y=1 \cdots ③$$

$$x_0x-\sqrt{3}(x_0y+xy_0)-y_0y=k$$

$$\therefore\ (x_0-\sqrt{3}\,y_0)x-(\sqrt{3}\,x_0+y_0)y=k \cdots ④$$

③，④は同値でなければならないから

$$kx_0=x_0-\sqrt{3}\,y_0,\quad ky_0=-(\sqrt{3}\,x_0+y_0)$$

$$\therefore\ k^2({x_0}^2+{y_0}^2)=(x_0-\sqrt{3}\,y_0)^2+(\sqrt{3}\,x_0+y_0)^2$$

$$=4({x_0}^2+{y_0}^2)=4$$

$\therefore\ k=\pm 2$　　求める最大値は 2

解7 双曲線②を原点の周りに θ 回転させて，それが $xy=1/2$ または $xy=-1/2$ に一致したら，②は①に接していたことになる．そういう θ を求める．$x=x'\cos\theta+y'\sin\theta$，$y=-x'\sin\theta+y'\cos\theta$ を②式に代入して，

$$2(x'^2-y'^2)\sin(2\theta+\pi/6)+4x'y'\sin(2\theta-\pi/3)=k$$

これと，$x'y'=1/2$ または $-1/2$ とが同値ならば，$\sin(2\theta+\pi/6)=0$　$\therefore\ \theta=-\pi/12,\ 5\pi/12,\ \cdots$

これらを上式に代入して，求める最大値は 2

解8 ②式から

$$k=\{x-(2+\sqrt{3})y\}\{x+(2-\sqrt{3})y\}$$

ここで，$\overrightarrow{X}=(x,\ y)$，$\vec{a}=(1,\ -2-\sqrt{3})$，$\vec{b}=(1,\ 2-\sqrt{3})$ とおくと，

$$k=(\vec{a}\cdot\vec{x})(\vec{b}\cdot\vec{x})=|\vec{a}||\vec{b}||\vec{x}|^2\cos\alpha\cdot\cos\beta$$

$\overrightarrow{X}$ は，曲線①上の位置ベクトルで

$|\overrightarrow{X}|=1$，$|\vec{a}|=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，

$|\vec{b}|=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

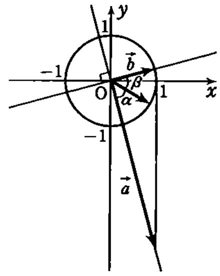
また $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

から $\vec{a} \perp \vec{b}$　$\therefore\ \alpha+\beta=\pi/2$

$\therefore\ k=2\sin 2\alpha$

ゆえに，求める最大値は 2

$(\alpha=\pi/4)$



解11 ②式に $x=\cos\theta$，$y=\sin\theta\ (0 \leqq \theta < 2\pi)$ を代入して $k=\cos^2\theta-2\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta-\sin^2\theta$

$$=\cos 2\theta-\sqrt{3}\sin 2\theta=2\sin(2\theta+5\pi/6)$$

ゆえに，求める最大値は 2

$$(\because\ 5\pi/6 \leqq 2\theta+5\pi/6 < 4\pi+5\pi/6)$$

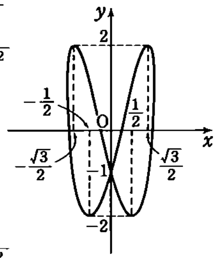
解14 ①式を②式に代入して

$$k=2x^2-1\pm 2\sqrt{3}\,x\sqrt{1-x^2}$$

$$k_1=2x^2-1+2\sqrt{3}\,x\sqrt{1-x^2}$$

として k_1 の増減を調べると

x	-1		$-1/2$		$\sqrt{3}/2$		1
k_1'		$-$	0	$+$	0	$-$	
k_1	1	↘	-2	↗	2	↘	



$$k_2=2x^2-1-2\sqrt{3}\,x\sqrt{1-x^2}$$

の増減も同様に調べて，x の関数 k のグラフを描くと上図のようになる．求める最大値は 2

解15 ①，②両式とも両辺を x で微分すると，それぞれ $2x+2yy'=0$

$$k'=2x-2\sqrt{3}\,y-2\sqrt{3}\,xy'-2yy'$$

曲線①と②とが接する必要十分条件を求めたいので，上式から y' を消去すると

$$\sqrt{3}\,x^2+2xy-\sqrt{3}\,y^2=(\sqrt{3}\,x-y)(x+\sqrt{3}\,y)=0$$

これと①との連立で，接点の座標を求めて，②式に代入すると，求める最大値は 2

解17 ①，②から

$$k=(x^2-2\sqrt{3}\,xy-y^2)/(x^2+y^2)$$

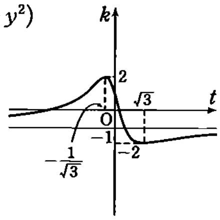
1)　$x=0$ のとき，

①から $y^2=1$

$\therefore\ k=-1$

2)　$x \neq 0$ のとき，

$(y/x=t$ とおくと)



$$k=\frac{1-2\sqrt{3}\,t-t^2}{1+t^2}$$

これの増減を調べて最大値は2

問Aの解1, 12, 17に関連 ①, ②式から

$$x^2-2\sqrt{3}\,xy-y^2=k(x^2+y^2)$$

$$\therefore\ (k-1)x^2+2\sqrt{3}\,xy+(k+1)y^2=0\ \cdots\ ③$$

1) $k=1$ のとき $(\sqrt{3}\,x+y)y=0$

2) $k\neq1$ のとき ③式で, x の実数条件をとると $(\sqrt{3}\,y)^2-(k-1)(k+1)y^2=(4-k^2)y^2\geqq0$

ここで, $\begin{cases} y=0 \longrightarrow x^2=1 \text{ で } k=1 \\ y\neq0 \longrightarrow 4-k^2\geqq0 \text{ で } -2\leqq k\leqq2 \end{cases}$

以上1), 2)から, 求める最大値は2

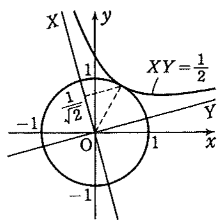
解20 $k=x^2-2\sqrt{3}\,xy-y^2$

$=\{x-(2+\sqrt{3})y\}\{x+(2-\sqrt{3})y\}$

$=\dfrac{x-(2+\sqrt{3})y}{\sqrt{1^2+(2+\sqrt{3})^2}}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

$\times\dfrac{x+(2-\sqrt{3})y}{\sqrt{1^2+(2-\sqrt{3})^2}}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

$=4XY$ (ここで, Xは直線 $x-(2+\sqrt{3})y=0$ と点$(x,\ y)$の距離($X>0$ の部分). Y は直線 $x+(2-\sqrt{3})y=0$ と点$(x,\ y)$との距離($Y>0$ の部分). この2直線は直交するので, X-Y 直交座標面となる.)



ゆえに, kの最大値を求めるには, XYの最大値を求めればよいから, X-Y 平面で$(XY)_{\max}$を考える. $X^2+Y^2=1$ $(x^2+y^2=1)$上の点$(X,\ Y)$を使えば, 上図から $(XY)_{\max}=1/2$

ゆえに, 求める最大値は $4\times1/2=2$

解21 曲線①と②とは, それぞれ, 原点を中心とする円と直角双曲線であるから, この2つが接するならば, 問Cの**解1**より

$$16x^4-4(k+4)x^2+(k+1)^2=16(x-\alpha)^2(x+\alpha)^2$$
$$=16(x^2-\alpha^2)^2=16x^4-32\alpha^2x^2+16\alpha^4=0$$

これは, xに関する恒等式であるから

$$-4(k+4)=-32\alpha^2,\ (k+1)^2=16\alpha^4$$

αを消去して $k=\pm2$ 曲線①と②の接する必要十分条件がこれであるから, 求める最大値は2

☆類題としての問A, B, C. それぞれに22, 15, 11通りの解法群. 考察が可能な最小限のデータはそろっているように見える. ここは, 数式を使わない議論ができそうなところでもあり, 発表者の教養の見せどころの部分でもある. また, ‘高校数学という文化’の成り立ちにかかわる部分であるかもしれない.

3. 高校教師の数学随筆の可能性

	柳田国男の場合	高校教師の場合
発端	⊙今迄, 歴史に登場しなかった文化, 中央以外の文化, 未発掘の文化に着眼. ⊙山人への思い. 日本人の源流についての推理. ⊙中央(学界, アカデミー)への反発, 既存の歴史学への反発. ※既存の西欧思想に抗して, キリスト教を絶対視しないH.ハイネやA.フランスに鼓舞された.	⊙1つの問に対するおびただしい量の「別解」の発見. (新解法またはエレガントな解法の発見, または新指導法の発見.) ⊙‘高校数学という文化’の存在の予感. ⊙純粋数学者(大学)への劣等感. ※教師の, 数学指導上の様々な‘悩みやぼやき’
方法	◎旅行, 好事家等からのデータの収集(伝承, 民話, 方言, 風俗, 習慣等) (人の世のすべての現象にわたってデータは集められた. 学問的には, 法学, 人類学, 考古学, 歴史学, 宗教学等々に関係した.) ◎収集の後の整理, 分析, 考察は, 研究者の教養と個性によった. ◎文献偏重の既成史学を批判し, ‘重出立証法’の有効性を強調した.	◎教育学会誌や教科書出版社の定例刊パンフレットあさり(高校教師の感想やぼやきや別解を集め分析する). ▶別解を発見, 収集し, 並べる. → ▶既出の別解に加えて, 新別解を開発する. → ▶問を変化させ(拡張, 類題), もとの問の別解群を適用, または対応させる. → ▶指導の別方法を開発する. → ▶別解の多い‘問題’を開発する. → ◎高校数学教育に於ける別解中心教育の有効性.

以下略

(湘南工科大学附属高校)