組立除法の応用例

熊野　充博（くまの　みつひろ）

組立除法は，周知のとおり，割り算の簡便な計算方法である．
それは，

① 整式 $f(x)$ を 1 次式 $x-\alpha$ で割るときの商と余りを決定する
② 剰余定理により，整式 $f(x)$ を 1 次式 $x-\alpha$ で割った余りが $f(\alpha)$ であることから，関数値 $f(\alpha)$ を導き出す
③ 整式 $f(x)$ を $x-\alpha$ のベキに展開する

などの場合にしばしば使われている．これ以外にも，まだ役に立ちそうな場面はありそうである．本当は既知の事柄であるが，あまり知られていないことを紹介してみたい．

【例題 1】　2 進数 10111 を 10 進数に直せ．

(解)

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 & & 2 & 4 & 10 & 22 \\
\hline
 & 1 & 2 & 5 & 11 & \| \ 23
\end{array}
$$

答　23

(参考文献[1]を参照)

【例題 2】　次の恒等式が成り立つように，定数 a, b, c, d の値を求めよ．

$2x^3-3x^2+5x-1$
$=a(x-1)(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-2)+c(x-1)+d$

(解)　次のような組立除法を行えばよい．

$$
\begin{array}{r|rrrr}
1 & 2 & -3 & 5 & -1 \\
 & & 2 & -1 & 4 \\
\hline
2 & 2 & -1 & 4 & \| \ 3=d \\
 & & 4 & 6 & \\
\hline
3 & 2 & 3 & \| \ 10=c & \\
 & & 6 & & \\
\hline
 & a=2 & \| \ 9=b & &
\end{array}
$$

理由は簡単である．上記の組立除法を順番にたどっていくと

$2x^3-3x^2+5x-1$
$=(2x^2-x+4)(x-1)+3$
$=\{(2x+3)(x-2)+10\}(x-1)+3$
$=[\{2(x-3)+9\}(x-2)+10](x-1)+3$
$=2(x-1)(x-2)(x-3)+9(x-1)(x-2)+10(x-1)+3$

したがって，$a=2$, $b=9$, $c=10$, $d=3$ となるわけである．

【例題 3】　次の恒等式が成り立つように，定数 a, b, c, d の値を求めよ．

$2x^3-3x^2+5x-1$
$=ax(x-1)(x-2)+bx(x-1)+cx+d$

(解)　次のような組立除法を行えばよい．

$$
\begin{array}{r|rrrr}
0 & 2 & -3 & 5 & -1 \\
 & & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 2 & -3 & 5 & \| \ -1 \\
 & & 2 & -1 & \\
\hline
2 & 2 & -1 & \| \ 4 & \\
 & & 4 & & \\
\hline
 & 2 & \| \ 3 & &
\end{array}
$$

これによって，$a=2$, $b=3$, $c=4$, $d=-1$ となる．

例題 3 に関連して，「階乗関数」$x^{(n)}$ を定義しよう．

[定義 1]

$x^{(n)}=x(x-1)(x-2)\ \cdots\cdots\ (x-n+1)$

$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$x^{(0)}=1$ (これは，順列の数 ${}_m\mathrm{P}_n$ の拡張である)

例えば　$x^{(1)}=x$, $x^{(2)}=x(x-1)$,
$x^{(3)}=x(x-1)(x-2)$, $\cdots\cdots$

したがって，例題 3 の結果は，階乗関数を用いて，

$2x^3-3x^2+5x-1=2x^{(3)}+3x^{(2)}+4x^{(1)}-x^{(0)}$

と書ける (階乗関数については参考文献[2]を参照)．

更に，階乗関数を用いて広義の 2 項係数 $\dbinom{x}{n}$ を定義しよう．

［定義2］ $\displaystyle\binom{x}{n}=\frac{x^{(n)}}{n!}$

$$=\frac{x(x-1)(x-2)\cdots\cdots(x-n+1)}{n!}$$

$(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

例えば，$\displaystyle\binom{x}{0}=1$，$\displaystyle\binom{x}{1}=x$，$\displaystyle\binom{x}{2}=\frac{x(x-1)}{2!}$，……

（これは組合せの数 ${}_m\mathrm{C}_n$ の拡張である）

【例題4】 広義の2項係数は次のような性質をもつ．

① $0\leqq x<n$ を満たす任意の整数 x に対して $\displaystyle\binom{x}{n}=0$

例えば $\displaystyle\binom{3}{5}=\frac{3\cdot2\cdot1\cdot0\cdot(-1)}{5!}=0$

② 広義の2項係数は任意の整数 x に対して整数値をとる．

(証明) x が負の整数の場合を示せば十分である．$x=-m$ (m は正の整数)とおく．

$$\binom{x}{n}=\binom{-m}{n}=\frac{(-m)(-m-1)\cdots(-m-n+1)}{n!}$$

$$=(-1)^n\cdot\frac{(m+n-1)\cdots\cdots(m+1)m}{n!}$$

$$=(-1)^n\cdot{}_{m+n-1}\mathrm{C}_n \quad ■$$

したがって，例題3の恒等式は，広義の2項係数を用いて

$$2x^3-3x^2+5x-1$$

$$=2\cdot3!\binom{x}{3}+3\cdot2!\binom{x}{2}+4\cdot1!\binom{x}{1}-\binom{x}{0}$$

$$=12\binom{x}{3}+6\binom{x}{2}+4\binom{x}{1}-\binom{x}{0}$$

【例題5】 一般に，n 次の整式 $f(x)$ は，広義の2項係数を用いて，

$$f(x)=b_0\binom{x}{n}+b_1\binom{x}{n-1}+\cdots\cdots+b_{n-1}\binom{x}{1}+b_n\binom{x}{0}$$

と書ける．

このような形の展開を，仮に「ニュートン展開」と呼ぶことにしよう（ニュートンの補間公式と関係があるため）．

〔定理1〕 n 次の整式 $f(x)$ が任意の整数 x に対して整数値をとるための必要十分条件は，「ニュートン展開」の係数 b_0，b_1，……，b_n がすべて整数であることである．

(証明) いま，n 次の整式 $f(x)$ が任意の整数 x に対して整数値をとるとする．

例題5の $f(x)$ の「ニュートン展開」式において，順次 $x=0$，1，2，……，n を代入すると

$$f(0)=b_n,\quad f(1)=b_{n-1}+b_n$$

$$f(2)=b_{n-2}+2b_{n-1}+b_n$$

………

$$f(n)=b_0+{}_n\mathrm{C}_{n-1}b_1+{}_n\mathrm{C}_{n-2}b_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_1b_{n-1}+b_n$$

したがって，仮定により $f(0)$，$f(1)$，……，$f(n)$ は整数で，

$$b_n=f(0)$$

$$b_{n-1}=f(1)-b_n$$

………

$$b_0=f(n)-\{{}_n\mathrm{C}_{n-1}b_1+{}_n\mathrm{C}_{n-2}b_2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_1b_{n-1}+b_n\}$$

が成り立つから，b_n，b_{n-1}，……，b_1，b_0 は整数である（このことのエレガントな証明は参考文献[3]を参照)．

逆に，「ニュートン展開」の係数 b_0，b_1，……，b_n がすべて整数であれば，整式 $f(x)$ が任意の整数 x に対して整数値をとることは広義の2項係数の性質から明らかである．■

上記の証明から定理1は次と同値であることがわかる．

〔定理2〕 n 次の整式 $f(x)$ が任意の整数 x に対して整数値をとるための必要十分条件は，$f(0)$，$f(1)$，……，$f(n)$ がすべて整数であることである．

（改　東工大　'93 前期）

次に定理1の応用例をあげる．

【例題6】 任意の整数値 x に対して，整式 $f(x)=ax^2+bx+c$ が整数となるための必要十分条件は，$2a$，$a+b$，c が整数であることである．

(解)

$$\begin{array}{r|lll}
0 & a & b & c \\
 & & 0 & 0 \\ \hline
1 & a & b & \| \ c \\
 & & a & \\ \hline
 & a \ \| & a+b &
\end{array}$$

上記の組立除法から

$$f(x)=ax^{(2)}+(a+b)x^{(1)}+cx^{(0)}$$

$$=2a\binom{x}{2}+(a+b)\binom{x}{1}+c\binom{x}{0}$$

したがって　$b_0=2a$，$b_1=a+b$，$b_2=c$　■

【例題 7】 n 次の整式
$f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n$
に対して，次のような組立除法を実行する．

$$\begin{array}{r|cccc|c}
a & p_0 & p_1 & \cdots\cdots & p_{n-1} & p_n \\
 & & & \cdots\cdots & & \\ \hline
b & q_0 & q_1 & \cdots\cdots & q_{n-1} \| & q_n \\
 & & & \cdots\cdots & & \\ \hline
 & r_0 & r_1\cdots\cdots & r_{n-2} \| & r_{n-1} &
\end{array}$$

上記の組立除法から，

$f(x)=(x-a)(q_0x^{n-1}+q_1x^{n-2}+\cdots\cdots+q_{n-1})+q_n$
$=(x-a)\{(x-b)(r_0x^{n-2}+\cdots\cdots+r_{n-2})+r_{n-1}\}+q_n$
$=(x-a)(x-b)(r_0x^{n-2}+\cdots\cdots+r_{n-2})+r_{n-1}(x-a)+q_n$
を得る．このとき，次の等式が成り立つ．

① $q_n=f(a)$ (これは剰余定理である)

② $f(b)=r_{n-1}(b-a)+f(a)$

すなわち

$$r_{n-1}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad (b \neq a)$$

(解) 組立除法の結果得られた恒等式の両辺に $x=a$, b を順次代入すればよい．係数 r_{n-1} は，x が a から b まで変化するときの関数 $f(x)$ の平均変化率である．
また，$y=r_{n-1}(x-a)+q_n$ とおけば，これは，2点 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ を通る直線の方程式を表している．
なお，$b=a$ のときは，$r_{n-1}=f'(a)$ とすればよい (ニュートンの補間公式との関連については，参考文献[4][5]を参照)．

次に例題7の若干の応用例をあげてみる．

【例題 8】 $f(x)=2x^3-3x^2+5x-1$ の $-1\leqq x\leqq 2$ における平均変化率 m を求めよ．

(解)

$$\begin{array}{r|rrr|l}
\underline{-1} & 2 & -3 & 5 & -1 \\
 & & -2 & 5 & ※ \\ \hline
\underline{2} & 2 & -5 & 10 \| & ※ \\
 & & 4 & -2 & \\ \hline
 & 2 & -1 \| & 8=m &
\end{array}$$

上記の組立除法から

$$m=\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=8$$

〔定理 3〕 整式 $f(x)$ を2次式 $(x-a)(x-b)$ で割った余りは，$m(x-a)+f(a)$ である (ここで，m は $a\leqq x\leqq b$ における整式 $f(x)$ の平均変化率を表す)．
(証明) 例題7の展開式より明らか．■

【例題 9】 $(2x^3-3x^2+5x-1)\div(x^2-3x+2)$ の商と余りを求めよ．
(解) $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ であるから

$$\begin{array}{r|rrr|r}
\underline{1} & 2 & -3 & 5 & -1 \\
 & & 2 & -1 & 4 \\ \hline
\underline{2} & 2 & -1 & 4 \| & 3 \\
 & & 4 & 6 & \\ \hline
 & 2 & 3 \| & 10=m &
\end{array}$$

したがって

商 $2x+3$

余り $10(x-1)+3=10x-7$

(別解) 拡張された組立除法によれば簡単である．

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & -3 & 5 & -1 \\
3 & & 6 & 9 & \\
-2 & & & -4 & -6 \\ \hline
 & 2 & 3 \| & 10 & -7
\end{array}$$

(参考文献[6][7][8]を参照)

【例題 10】 3点 $(-1, 2)$, $(1, -4)$, $(3, 6)$ を通る2次関数を求めよ．
(解) 例題7と定理3により，求める2次関数は，

$$f(x)=r_0(x+1)(x-1)+m(x+1)+2$$

とおける．m は，2点 $(-1, 2)$, $(1, -4)$ を通る直線の傾き -3 に等しい．$(3, 6)$ を通るから，

$$6=r_0\cdot 4\cdot 2-3\cdot 4+2$$

ゆえに $r_0=2$

よって

$$f(x)=2(x+1)(x-1)-3(x+1)+2$$
$$=2x^2-3x-3$$

【例題 11】 $a\leqq x\leqq b$ における整式 $f(x)$ の平均変化率を m とする．このとき

$$\int_a^b f'(x)dx=\Big[f(x)\Big]_a^b=(b-a)m$$

(証明) 平均変化率の定義から明らか．■

例題11の応用例をあげる．

【例題 12】 $I=\int_{-1}^{3}(x^3-x^2+x-1)dx$ の値を求めよ．

(解) $I=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x\right]_{-1}^{3}$

$$=\frac{1}{12}\Big[3x^4-4x^3+6x^2-12x\Big]_{-1}^{3}$$

ここで組立除法を行えばよい．

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
-1 & 3 & -4 & 6 & -12 & 0 \\
 & & -3 & 7 & -13 & ※ \\ \hline
3 & 3 & -7 & 13 & -25 \| & ※ \\
 & & 9 & 6 & 57 & \\ \hline
 & 3 & 2 & 19 \| & 32 = m &
\end{array}
$$

ゆえに　$I=\dfrac{\{3-(-1)\}}{12}\times 32=\dfrac{32}{3}$

最後に，数列への応用例をあげる．

【例題 13】　初項から第 n 項までの和 S_n が，次の式で表される数列の一般項を求めよ．

$$S_n=4n^2-3n$$

(解)　$n\geqq 2$ のとき，$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{S_n-S_{n-1}}{n-(n-1)}$

であるから，組立除法を用いて

$$
\begin{array}{r|rrr}
n-1 & 4 & -3 & 0 \\
 & & 4n-4 & ※ \\ \hline
n & 4 & 4n-7 \| & ※ \\
 & & 4n & \\ \hline
 & 4 \| & 8n-7 &
\end{array}
$$

よって　$a_n=8n-7$ …… ①

$a_1=S_1=4-3=1$ は，①について $n=1$ とおいて得られる．

ゆえに　$a_n=8n-7$　($n=1$，2，3，……)

《参考文献》

[1]　岩瀬　勝彦「n 進法の世界」（国土社）

[2]　高橋　健人「差分方程式」（培風館）

[3]　遠山　啓「リフレッシュ数学 1　数と式」（講談社）

[4]　柴垣和三雄「実用数学」（共立出版）

[5]　小門・八田「数値計算法の基礎と応用」（森北出版）

[6]　大木　實「組立除法について」（『数研通信』No. 16）

[7]　伊藤　潤一「NON—STA 通信」Vol. 2 および Vol. 3

[8]　小倉・奥川「受験数学の盲点 79」（駸々堂）

[9]　拙　稿「組立除法の一応用」（広島県高校教育研究会・数学部会『会誌』25 号）

（広島県立 沼南高等学校）