チェビシェフの不等式について

遠藤(えんどう)　一成(かずなり)
中島(なかじま)　政彦(まさひこ)

1　チェビシェフの不等式

1992 年に東北大学で出題された入試問題を考えよう．

> $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots\cdots \geqq a_n$，$b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots\cdots \geqq b_n$ のとき，次の不等式を証明せよ．
> $$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \leqq n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \quad \cdots\cdots ①$$

これは，チェビシェフの不等式と呼ばれる不等式そのものである．

証明は

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) = \sum_{i>j}(a_i - a_j)(b_i - b_j)$$

による．

さて，①の両辺を n^2 で割ると，

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n} \leqq \frac{a_1b_1+\cdots+a_nb_n}{n} \quad \cdots\cdots ②$$

と変形できる．そして，このチェビシェフの不等式をネタにした入試問題は，よく見かけられる．

例えば，$n=2$，3 の場合

(1)　$a \geqq b \geqq c$，$x \geqq y \geqq z$ のとき，

$$\frac{a+b}{2}\cdot\frac{x+y}{2} \leqq \frac{ax+by}{2}$$

$$\frac{a+b+c}{3}\cdot\frac{x+y+z}{3} \leqq \frac{ax+by+cz}{3}$$

を証明せよ．

特殊な条件をつけたものとして

(2)　$a \geqq b \geqq c$，$x \geqq y \geqq z$，$x+y+z=0$ のとき $ax+by+cz \geqq 0$ を証明せよ．

(3)　a，b を正の数とするとき，
$(a+b)^3 \leqq k(a^3+b^3)$
が常に成り立つとする．このような k のうち最小のものを求めよ．

そこで，本稿でもチェビシェフの不等式をネタにした一般化，特殊化を考える．

2　変数に重みをつける

チェビシェフの不等式②では

$$\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n} = \frac{1}{n}a_1 + \frac{1}{n}a_2 + \cdots\cdots + \frac{1}{n}a_n$$

であるから，n 個の変数すべてに $\frac{1}{n}$ という重みがついている．したがって，この重みのつけ方を一般化することにより次の不等式が得られる．

> **定理 1**　$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$，$b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_n$，
> $p_1 > 0$，$\cdots\cdots$，$p_n > 0$，
> $p_1 + \cdots\cdots + p_n = 1$ のとき
> $$\left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} p_i b_i\right) \leqq \sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i$$

証明

$$(\text{右辺}) - (\text{左辺}) = \sum_{i>j} p_i p_j (a_i - a_j)(b_i - b_j)$$

より明らか．

3　積分型への一般化

$\frac{a_1+\cdots\cdots+a_n}{n}$ は n 個の相加平均であるが，区分求積法を思い浮かべるとチェビシェフの不等式は

2 つの関数 $f(x)$，$g(x)$ が $0 \leqq x \leqq 1$ で単調減少のとき，

$$\int_0^1 f(x)\,dx \int_0^1 g(x)\,dx \leqq \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx$$

と積分型の不等式に拡張できることを示唆している．

実際，次の定理にまとめることができる．

定理 2
(1) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，2つの関数 $f(x)$，$g(x)$ がともに単調減少（単調増加でもよい）であれば

$$\int_0^1 f(x)\,dx \int_0^1 g(x)\,dx \leqq \int_0^1 f(x)g(x)\,dx \quad \cdots\cdots ③$$

(2) $f(x)$，$g(x)$ の一方が単調増加，他方が単調減少であれば

$$\int_0^1 f(x)\,dx \int_0^1 g(x)\,dx \geqq \int_0^1 f(x)g(x)\,dx \quad \cdots\cdots ④$$

証明
$h(x,\ y)=\{f(x)-f(y)\}\{g(x)-g(y)\}$ とおく．

$$I=\int_0^1\int_0^1 h(x,\ y)\,dx\,dy$$
$$=\int_0^1\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\,dy-\int_0^1\int_0^1 f(x)g(y)\,dx\,dy$$
$$-\int_0^1\int_0^1 f(y)g(x)\,dx\,dy+\int_0^1\int_0^1 f(y)g(y)\,dx\,dy$$
$$=\int_0^1 f(x)g(x)\,dx-\int_0^1 f(x)\,dx\int_0^1 g(y)\,dy$$
$$-\int_0^1 f(y)\,dy\int_0^1 g(x)\,dx+\int_0^1 f(y)g(y)\,dy$$
$$=2\left\{\int_0^1 f(x)g(x)\,dx-\int_0^1 f(x)\,dx\int_0^1 g(x)\,dx\right\}$$

(1)の条件の下では，$h(x,\ y)\geqq 0$ であるから $I\geqq 0$ より③が成り立つ．
④も同様．

系 $0\leqq x\leqq 1$ のとき，
$f(x)$，$g(x)$ の一方が単調増加，他方が単調減少であれば

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx \leqq \int_0^1 |f(x)|\,dx\int_0^1 |g(x)|\,dx$$
$$\leqq \left\{\int_0^1 f(x)^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^1 g(x)^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

が成立する．

証明 1番目の不等号は定理2(2)から明らか．

$$\int_0^1 f(x)\,dx \leqq \int_0^1 1\cdot|f(x)|\,dx$$

シュワルツの不等式から

$$\leqq \left\{\int_0^1 1^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int_0^1 f(x)^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$=\left\{\int_0^1 f(x)^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

が成立するので2番目の不等号の成立が証明される．

関数解析の記号 L^p-ノルム

$$\|f\|_p=\left\{\int_0^1 |f(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}}$$

を用いれば，系は

$$(f,\ g)\leqq \|f\|_1\|g\|_1\leqq \|f\|_2\|g\|_2$$

と表される．

そして，この不等式は，f，g が系の条件を満たすときには常にシュワルツの不等式の間に L^1-ノルムの積が入ることを示している．

4 特殊化

$a_1=b_1$，$a_2=b_2$，……，$a_n=b_n$，$a_1\geqq 0$，……，$a_n\geqq 0$ の場合は，$a_1\geqq a_2\geqq\cdots\cdots\geqq a_n$ という順序についての条件は不要になる．
チェビシェフの不等式から

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\cdot\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\leqq\frac{a_1{}^2+\cdots+a_n{}^2}{n}$$

また，a_1，a_2，……，a_n と $a_1{}^2$，$a_2{}^2$，……，$a_n{}^2$ の大小関係は変わらないから（$a_1>a_3>a_2\cdots\cdots$ ならば $a_1{}^2>a_3{}^2>a_2{}^2\cdots\cdots$ という意味で）

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\cdot\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\cdot\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$$
$$\leqq\frac{a_1{}^3+\cdots+a_n{}^3}{n}$$

これを繰り返して，次の2つの不等式が得られる．

定理 3 $a_1\geqq 0$，$a_2\geqq 0$，…，$a_n\geqq 0$ のとき
(1) $$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^p\leqq\frac{a_1{}^p+a_2{}^p+\cdots+a_n{}^p}{n}$$
(2) $$\frac{a_1{}^p+\cdots+a_n{}^p}{n}\cdot\frac{a_1{}^q+\cdots+a_n{}^q}{n}$$
$$\leqq\frac{a_1{}^{p+q}+\cdots+a_n{}^{p+q}}{n}$$
が成立する．
ただし，p，q は自然数．

積分型に拡張すると，次の定理になる．

定理 4 $0\leqq x\leqq 1$ のとき，$f(x)\geqq 0$ であれば
(1) $$\left\{\int_0^1 f(x)\,dx\right\}^p\leqq\int_0^1 f(x)^p dx$$
(2) $$\int_0^1 f(x)^p dx\int_0^1 f(x)^q dx\leqq\int_0^1 f(x)^{p+q}dx$$
が成立する．

5 応用

最後に定理4(2)の応用を考えよう．まず簡単な計算を行う．$f(x)\geqq 0$ のとき

$$\left\{\int_0^1 f(x)^2dx\right\}^3=\left\{\int_0^1 f(x)^2dx\right\}^2\int_0^1 f(x)^2dx$$

シュワルツの不等式から

$$\leqq\int_0^1 f(x)^3dx\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 f(x)^2dx$$

定理4(2)から

$$\leqq\int_0^1 f(x)^3dx\int_0^1 f(x)^3dx$$

したがって

$$\left\{\int_0^1 f(x)^2dx\right\}^3\leqq\left\{\int_0^1 f(x)^3dx\right\}^2$$

よって

$$\left\{\int_0^1 f(x)^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}\leqq\left\{\int_0^1 f(x)^3dx\right\}^{\frac{1}{3}}$$

つまり　$\|f\|_2\leqq\|f\|_3$

同様に

$$\left\{\int_0^1 f(x)^3dx\right\}^4\leqq\left\{\int_0^1 f(x)^4dx\int_0^1 f(x)^2dx\right\}^2$$

$$\leqq\left\{\int_0^1 f(x)^4dx\right\}^2\int_0^1 f(x)^4dx$$

$$=\left\{\int_0^1 f(x)^4dx\right\}^3$$

ゆえに

$$\left\{\int_0^1 f(x)^3dx\right\}^{\frac{1}{3}}\leqq\left\{\int_0^1 f(x)^4dx\right\}^{\frac{1}{4}}$$

つまり，$\|f\|_3\leqq\|f\|_4$ となる．

以上の計算により L^p-ノルム ($p=1, 2, 3, \cdots$) について

$$\|f\|_1\leqq\|f\|_2\leqq\|f\|_3\leqq\|f\|_4\leqq\cdots\cdots$$

という関係が成立すると予想される．

注意 (1) L^p-ノルムの定義から $f(x)\geqq 0$ という条件は不要である．

(2) ヘルダーの不等式により容易に証明できるが本稿の目的に合わないので省略する．

（愛知県 滝高等学校）