対数関数を利用した (相加平均)≧(相乗平均) の証明

いまい たけひこ
今井 武彦

愛知県高等学校数学研究会における平成3年度の地区研究会において,「(相加平均)≧(相乗平均)」の証明方法が研究に採り上げられた. そこで刺激を受け, 過去に対数関数を利用して証明を得たことを思い出したので述べてみたい.

正の数 x_1, x_2, ……, x_n の相乗平均の対数をとると

$$\log\sqrt[n]{x_1x_2\cdot\cdots\cdot x_n}=\frac{1}{n}(\log x_1+\log x_2+\cdots+\log x_n)$$

である. これは, x_1, x_2, ……, x_n の対数の相加平均に他ならない. 対数関数 $\log x$ は定義域において単調に増加するから,

$$\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n)\geqq\sqrt[n]{x_1x_2\cdot\cdots\cdots\cdot x_n}$$

を証明することと,

「x_1, x_2, ……, x_n の相加平均 $\overline{x}$ の対数 $\log\overline{x}$」と「x_1, x_2, ……, x_n の対数の相加平均 $\overline{\log x}$」の間に

$$\log\overline{x}\geqq\overline{\log x}$$

が成り立つことを証明することは同値である. このように考えて, 論証を進めるにあたり, 若干の予備知識を挙げる.

予備1 「$\overline{ax+b}=a\overline{x}+b$ (a, b は定数)」これは「確率・統計」の教科書に載っている公式である. しかし,「数学I」において等式の証明のところで出題できる等式である. また,「基礎解析」において Σ を使った計算の練習問題とすることもできる.

証明 $\displaystyle\overline{ax+b}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(ax_k+b)$

$$=a\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k+\frac{1}{n}\cdot nb=a\overline{x}+b$$ 終

予備2 「対数関数 $y=\log x$ の $x=\overline{x}$ における接線を $y=ax+b$ としたとき,

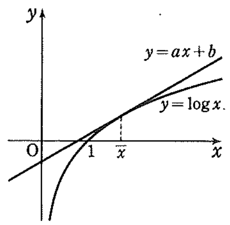
$ax+b\geqq\log x$ (等号は $x=\overline{x}$ のときに限って成り立つ)」

これは, $y=\log x$ が上に凸の関数であるので, 生徒は直感的に理解が可能であるが,「微分・積分」で与えることのできる問題である.

証明 $a=\dfrac{1}{\overline{x}}$

$b=-1+\log\overline{x}$

である.



$g(x)=ax+b-\log x$

とおくと,

$$g'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{1}{\overline{x}}-\frac{1}{x}$$

$$g'(\overline{x})=\frac{1}{\overline{x}}-\frac{1}{\overline{x}}=0 \quad\cdots\cdots ①$$

第2次導関数 $g''(x)$ を使えばよいわけだが, 第1次導関数 $g'(x)$ の使用までに止めると,

$0<x<\overline{x}$ のとき $g'(x)<0$ …… ②

$x>\overline{x}$ のとき $g'(x)>0$ …… ③

①,②,③により, $g(x)$ は $x=\overline{x}$ の左右において減少から増加に変わる. よって

$$\mathrm{Min}\,g(x)=g(\overline{x})=a\overline{x}+b-\log\overline{x}$$

$$=\frac{1}{\overline{x}}\cdot\overline{x}+(-1+\log\overline{x})-\log\overline{x}=0$$

したがって

$x=\overline{x}\Longrightarrow g(x)=0$ ∴ $ax+b=\log x$

$x\neq\overline{x}\Longrightarrow g(x)>0$ ∴ $ax+b>\log x$ 終

本題 「正の数 x_1, x_2, ……, x_n の相加平均を $\overline{x}$ としたとき, $\overline{x}\geqq\sqrt[n]{x_1x_2\cdot\cdots\cdots\cdot x_n}$」

証明 $y=\log x$ の $x=\overline{x}$ における接線を $y=ax+b$ とすると, 予備2から

$ax+b\geqq\log x$ (等号は $x=\overline{x}$ のときに限って成り立つ)

したがって

(＊) $ax_k+b\geqq\log x_k$ ($k=1$, 2, ……, n)

$(**)\ a\bar{x}+b=\log\bar{x}$

$(*)$から　$\overline{ax+b}\geqq\overline{\log x}$　…… ④

予備1から　$\overline{ax+b}=a\bar{x}+b$　…… ⑤

④，⑤から　$a\bar{x}+b\geqq\overline{\log x}$　…… ⑥

よって，$(**)$と⑥により　$\log\bar{x}\geqq\overline{\log x}$

すなわち

$$\log\bar{x}\geqq\frac{1}{n}(\log x_1+\log x_2+\cdots\cdots+\log x_n)$$
$$=\log\sqrt[n]{x_1x_2\cdots\cdots x_n}$$

$\log x$ は増加関数であるから，

$$\bar{x}\geqq\sqrt[n]{x_1x_2\cdots\cdots x_n}$$

上式において等号が成立するのは，$(*)$においてすべて等号が成り立つとき，すなわち $x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n=\bar{x}$ のときに限る．　終

なお，「数学Ⅰ」で扱う

「x_1，x_2 が正のとき，$\dfrac{x_1+x_2}{2}\geqq\sqrt{x_1x_2}$」

を利用してできる不等式の証明問題，例えば

例「$x>0$ のとき，$45x+\dfrac{1}{5x}\geqq6$ が成り立つことを証明せよ．また，等号が成り立つのはどんなときか」

について，どの教科書もおおよそ次のように記述している．

証明　正の2数 $45x$，$\dfrac{1}{5x}$ について

$$\frac{45x+\dfrac{1}{5x}}{2}\geqq\sqrt{45x\cdot\frac{1}{5x}}=3 \quad\cdots\cdots Ⓐ$$

ゆえに　$45x+\dfrac{1}{5x}\geqq6$

上式で，等号が成り立つのは $45x=\dfrac{1}{5x}$ すなわち $x=\dfrac{1}{15}$ のときに限る．　終

私は，上の ~~~ のところを生徒には，

$45x=\dfrac{1}{5x}=3$ すなわち $x=\dfrac{1}{15}$

と記述させたい．

それは，$45x$ と $\dfrac{1}{5x}$ の相加平均と相乗平均が等しいのは，$45x$ と $\dfrac{1}{5x}$ がもともと等しくて平均をとる必要のないときである．それは，それぞれがⒶで求めた相乗平均(＝相加平均) 3 に等しいときであると認識させたいからである．2次方程式 $225x^2=1$ を $x>0$ の範囲で解かせて $x=\dfrac{1}{15}$ を求めさせるよりも，連立方程式 $45x=3$，$\dfrac{1}{5x}=3$ を解かせる方がよいであろう．

(愛知県立 木曽川高等学校)