内積に関する異なる7つの証明

君島（きみじま） 巌（いわお）

はじめに

ベクトルの内積の公式の有用性は目を見張るものがある．しかし，私は前々から内積の公式

$ab\cos\theta=x_1x_2+y_1y_2$ は，左辺と右辺が今ひとつそぐわない感じをもっていた．これをしっくりさせたいと追求する中で，1年間に7つの証明法を見つけた．以下発見順にその動機と証明法を述べる．

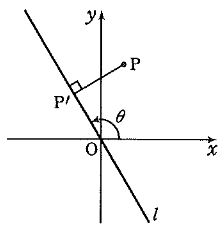
(1) 一次変換を用いて正射影を表す行列を求め，それを利用する方法

動機…T君が次の補題の意味が分からないと言って質問を持ってきた．そのとき私は，この補題の結果を用いて内積の公式が証明できるのではと思い計算をすすめた．

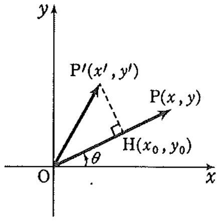
補　題

原点を通り，傾きが $\tan\theta$ である直線 l に関する正射影を表す行列を A とすると，

$$A=\begin{pmatrix}\cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta\\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta\end{pmatrix}$$



この証明は，参考書などに載っているので省略する．さて，この補題を用いて内積の公式を証明する．



図のように $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}=(x,\ y)$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}'}=\vec{b}=(x',\ y')$　$\angle x\mathrm{OP}=\theta$ とする．

$$\sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \cdots\cdots ①$$

補題から

$$\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta\\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x'\cos^2\theta+y'\cos\theta\sin\theta\\ x'\cos\theta\sin\theta+y'\sin^2\theta\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots ②$$

さて

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2}$　（$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を鋭角とする．）

$$=\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{(x'\cos^2\theta+y'\cos\theta\sin\theta)^2+(x'\cos\theta\sin\theta+y'\sin^2\theta)^2}$$

（∵　②より）

$$=\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{\left(x'\frac{x^2}{x^2+y^2}+y'\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^2+\left(x'\frac{xy}{x^2+y^2}+y'\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)^2}$$

（∵　①より）

$$=\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{\sqrt{(x^2x'+xyy')^2+(xyx'+y^2y')^2}}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2(x^2+y^2)x'^2+2xy(x^2+y^2)x'y'+y^2(x^2+y^2)y'^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

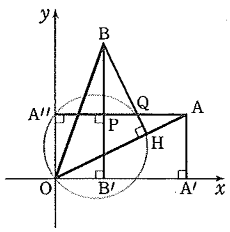
$$=\frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2x'^2+2xyx'y'+y^2y'^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$=xx'+yy'$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が鈍角のときも同様だろう．

(2) 初等幾何的な方法

動機…(1)の方法で証明に成功したのに意を強くして，次に内積の公式の右辺の $x_1x_2+y_1y_2$ の形が単純なので，ひょっとしたら図形的な証明も可能なのではと思い挑戦した．3時間の苦闘の末，冗長すぎるが，とにかく図形的証明に成功した．



・証明すべきこと

2つのベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ の内積を考える.

$$OA \cdot OH = OA' \cdot OB' + BB' \cdot PB'$$

がいえればよい.

(証明) 上図のように直線を結ぶ. 明らかに4点 O, H, Q, A″ は同一円周上にある. 方べきの定理から

$$AH \cdot OA = AQ \cdot AA''$$
$$= AQ \cdot OA'$$
$$(OA - OH) \cdot OA = OA'(AA'' - A''Q)$$
$$OA^2 - OH \cdot OA = OA' \cdot AA'' - OA' \cdot A''Q$$
$$\therefore\ OH \cdot OA = OA^2 - OA' \cdot AA'' + OA' \cdot A''Q$$
$$= OA^2 - OA'^2 + OA' \cdot A''Q$$
$$= AA'^2 + OA' \cdot A''Q$$
$$= AA'^2 + OA'(A''P + PQ)$$
$$= AA'^2 + OA' \cdot A''P + OA' \cdot PQ$$
$$= AA'^2 + OA' \cdot OB' + OA' \cdot PQ \quad \cdots\cdots ①$$

さて $\triangle BPQ \backsim \triangle OAA'$ であるから

$$\frac{PQ}{BP} = \frac{AA'}{OA'}$$

ゆえに $OA' \cdot PQ = AA' \cdot BP$ ……②

②を①に代入して

$$OH \cdot OA$$
$$= AA'^2 + OA' \cdot OB' + AA' \cdot BP$$
$$= OA' \cdot OB' + AA'(AA' + BP)$$
$$= OA' \cdot OB' + AA'(PB' + BP)$$
$$= OA' \cdot OB' + AA' \cdot BB'$$
$$= OA' \cdot OB' + PB' \cdot BB' \quad \text{(q. e. d.)}$$

(3) 余弦の加法定理を用いる方法

$\boxed{\text{動機}}$…(2)の幾何的な方法で証明すべきこと

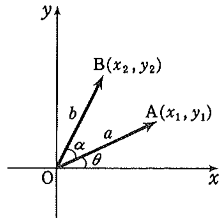
$$OA \cdot OH = OA' \cdot OB' + BB' \cdot PB'$$

の両辺を OA・OH で何げなく割ってみた.

$$1 = \frac{OA' \cdot OB'}{OA \cdot OH} + \frac{BB' \cdot PB'}{OA \cdot OH} \cdots\cdots\cdots\cdots$$

こうして推論していたら, 最終的に加法定理の形が出てしまいびっくりした. これを逆にたどったのがこの証明である.

(証明)



$\angle xOA = \theta$, $\angle AOB = \alpha$

$|\overrightarrow{OA}| = a$, $|\overrightarrow{OB}| = b$ とする.

$$\cos\alpha = \cos(\theta + \alpha - \theta)$$
$$= \cos(\theta+\alpha)\cos\theta + \sin(\theta+\alpha)\sin\theta$$

ゆえに $\cos\alpha = \dfrac{x_2}{b} \cdot \dfrac{x_1}{a} + \dfrac{y_2}{b} \cdot \dfrac{y_1}{a}$

よって $ab\cos\alpha = x_1x_2 + y_1y_2$

$$= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \quad \text{(q. e. d.)}$$

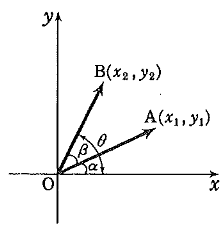
驚くほど簡明な証明である. これをみると, 内積の公式は余弦の加法定理を成分表示したものであることが分かる.

(4) 正接の加法定理を用いる方法

$\boxed{\text{動機}}$…(3)の証明を終えて, これが内積の本質的な証明だと分かったとき, 要は $\vec{a}$, $\vec{b}$ の挟む角の $\cos\theta$ が成分 (x_1, y_1), (x_2, y_2) で表せればよいということがはっきり認識できた. それから5分程して次の証明の構想が浮かんだ.

2直線 $y = m_1x + b_1$, $y = m_2x + b_2$ のなす鋭角を θ とすると $\tan\theta = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right|$ が使えると思った. $\tan\theta$ からは $\cos\theta$ が求められるのである.

(証明)



$\angle xOA = \alpha$, $\angle AOB = \beta$, $\angle xOB = \theta$,

$OA = a$, $OB = b$ とおく.

さて, $\tan\beta = \tan(\theta - \alpha)$

$$= \frac{\tan\theta - \tan\alpha}{1 + \tan\theta\tan\alpha}$$

$$=\frac{\frac{y_2}{x_2}-\frac{y_1}{x_1}}{1+\frac{y_2}{x_2}\cdot\frac{y_1}{x_1}}$$

$$=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_1x_2+y_1y_2} \quad \cdots\cdots ①$$

一方

$$1+\tan^2\beta=\frac{1}{\cos^2\beta} \quad \cdots\cdots ②$$

①から

$$1+\tan^2\beta=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2}{(x_1x_2+y_1y_2)^2}$$

$$=\frac{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}{(x_1x_2+y_1y_2)^2}$$

$$=\left(\frac{ab}{x_1x_2+y_1y_2}\right)^2 \quad \cdots\cdots ③$$

③を②に代入して

$$\frac{1}{\cos^2\beta}=\left(\frac{ab}{x_1x_2+y_1y_2}\right)^2$$

ゆえに $\cos\beta=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{ab}$

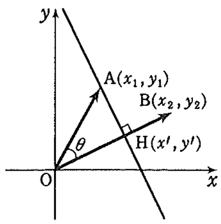
よって $ab\cos\beta=x_1x_2+y_1y_2$

つまり $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2$ (q. e. d.)

(5) 2直線の垂直条件を用いる方法

$\boxed{\text{動機}}$…(1)～(4)の証明で自信がついたが今度は数学Ⅰ(旧制度)の範囲で，ごく基本的な証明も考えることにした．2直線の垂直条件 $m_1m_2=-1$ を用いてすぐ1つ見つかった．

(証明)



$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\angle AOB=\theta$, A から OB に下ろした垂線の足を $H(x', y')$ とする．

$$OB: \quad y=\frac{y_2}{x_2}x \quad \cdots\cdots ①$$

$$AH: \quad y-y_1=-\frac{x_2}{y_2}(x-x_1) \quad \cdots\cdots ②$$

①，②の交点 $H(x', y')$ は

$$x'=\frac{x_2(x_1x_2+y_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$$

$$y'=\frac{y_2(x_1x_2+y_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}$$

ゆえに

$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$.

$=OH\cdot OB$

$=\sqrt{x'^2+y'^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}$

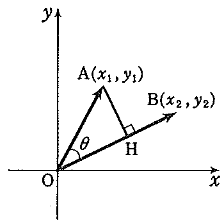
$$=\sqrt{\left\{\frac{x_2(x_1x_2+y_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}\right\}^2+\left\{\frac{y_2(x_1x_2+y_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}\right\}^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}$$

$$=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)\sqrt{x_2^2+y_2^2}}{x_2^2+y_2^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}$$

$=x_1x_2+y_1y_2$ (q. e. d.)

(6) 1点と直線の距離の公式を用いる方法

(証明)



$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\angle AOB=\theta$

AH を距離の公式で求める．

$OB: \quad y=\dfrac{y_2}{x_2}x$

ゆえに $y_2x-x_2y=0$

$$AH=\frac{|x_1y_2-x_2y_1|}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

$OH^2=OA^2-AH^2$

$$=(x_1^2+y_1^2)-\frac{(x_1y_2-x_2y_1)^2}{x_2^2+y_2^2}$$

$$=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)^2}{x_2^2+y_2^2}$$

ゆえに $OH=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$$=OA\cdot OB\cdot\frac{OH}{OA}$$

$=OB\cdot OH$

$$=\sqrt{x_2^2+y_2^2}\,\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

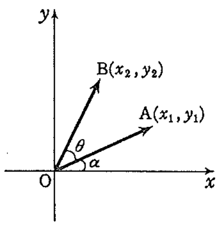
$=x_1x_2+y_1y_2$

(q. e. d.)

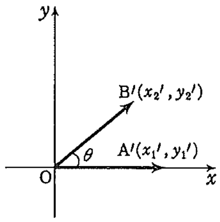
(7) 回転に関する一次変換を利用する方法

$\boxed{\text{動機}}$…回転に関する一次変換を授業で生徒に教えていたとき，ふとこれでも証明ができるなとインスピレーションがわいた．

（証明）



$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\angle xOA=\alpha$ とおく．
いま，時計方向に $-\alpha$ 回転する一次変換を f，それを表す行列を A とする．



$$f:\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}x_1'\\y_1'\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}x_2'\\y_2'\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}\cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha)\\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1' & x_2'\\ y_1' & y_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{pmatrix}$$

さて

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1'x_2'$$
$$=(x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha)(x_2\cos\alpha+y_2\sin\alpha)$$
$$=\left(x_1\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}+y_1\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\right)$$
$$\times\left(x_2\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}+y_2\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\right)$$
$$=\left(\frac{x_1^2+y_1^2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\right)\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\right)$$
$$=x_1x_2+y_1y_2$$

(q. e. d.)

お わ り に

内積の公式をしっくりと理解したいということが眼目であったが，目標は達した．(3)で述べたように内積の公式が余弦の加法定理と全く同じ内容であることが偶然に分かったのである．

それにしても，1つの公式の証明にこれほどの別解が見つかるとは思いもよらなかった．

（栃木県立 那須高等学校）