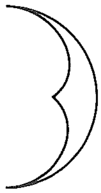
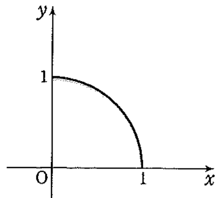
# 新作問題４題

みやかわ　ゆきたか
宮川　幸隆

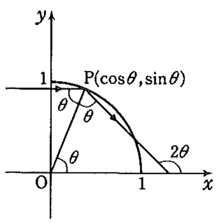
ミルクコーヒーを満たしたカップの水面（ミルクコーヒー面!?）や茶碗の底などに平行光線が当たると，右図のハートの出来そこないのような曲線が見られることがあります．筆者は高校生の頃から，この曲線を数学的に解明せんと欲していましたが，最近これに関した次のような問題を作成しました．



**問１**　座標平面上の４分円 $C：x^2+y^2=1$，$x>0$，$y\geqq 0$ の内側が鏡になっている．この鏡に $x$ 軸に平行な平行光線を当てたときの反射光線の包絡線（すべての反射光線に接するような曲線）を媒介変数表示して，その概形を図示せよ．




**解**　$C$ 上の点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ で反射した反射光線 $l_\theta$ と $x$ 軸の正の向きとのなす角は $2\theta$ であるから，$l_\theta$ の方程式は




$$(\cos 2\theta)(y-\sin\theta)=(\sin 2\theta)(x-\cos\theta)$$

$$\therefore\ x\sin 2\theta-y\cos 2\theta=\sin\theta$$

よって，$l_\theta$ と $l_\varphi$ との交点 $(x,\ y)$ は

$$\begin{pmatrix}\sin 2\theta & -\cos 2\theta\\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\theta\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$$ を解いて，

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{\sin 2(\varphi-\theta)}\begin{pmatrix}\sin\varphi\cos 2\theta-\cos 2\varphi\sin\theta\\ \sin\varphi\sin 2\theta-\sin 2\varphi\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \lim_{\varphi\to\theta}x$$

$$=\lim_{\varphi\to\theta}\frac{\sin\varphi(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\sin\theta}{2\sin(\varphi-\theta)\cos(\varphi-\theta)}$$

分子 $=(\sin\varphi\cos\theta-\cos\varphi\sin\theta)\cos\theta+\cos\varphi\sin\theta\cos\theta$

$$+(\sin\varphi\cos\theta-\cos\varphi\sin\theta)\cos\varphi-\sin\varphi\cos\theta\cos\varphi$$
$$-\sin^2\theta\sin\varphi+\sin\theta\sin^2\varphi$$
$$=(\sin\varphi\cos\theta-\cos\varphi\sin\theta)(\cos\theta+\cos\varphi)$$
$$+(\sin\theta-\sin\varphi)\cos(\theta+\varphi)$$

$$\therefore\ x=\frac{\cos\theta+\cos\varphi}{2\cos(\varphi-\theta)}$$
$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\varphi-\sin\theta}{\varphi-\theta}\cdot\frac{\varphi-\theta}{\sin(\varphi-\theta)}\cdot\frac{\cos(\theta+\varphi)}{\cos(\varphi-\theta)}$$

$$\therefore\ \lim_{\varphi\to\theta}x=\cos\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\cos 2\theta$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)\cos\theta$$

同様にして，

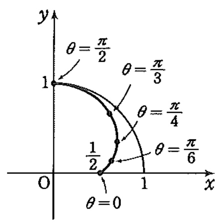
$$\lim_{\varphi\to\theta}y=\lim_{\varphi\to\theta}\left[-\frac{\sin\theta\sin\varphi(\cos\varphi-\cos\theta)(\varphi-\theta)}{\{\cos(\varphi-\theta)\}(\varphi-\theta)\sin(\varphi-\theta)}\right]$$
$$=\sin^3\theta$$

“包絡線は，その上のごく近い２点P，Qにおける接線の交点Rの座標の，Q ⟶ P のときの極限を用いてパラメータ表示できる” …… ①

から，この包絡線の媒介変数表示は

$$x=\left(1-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)\cos\theta,$$
$$y=\sin^3\theta$$

であり，その概形は右図のようになる．

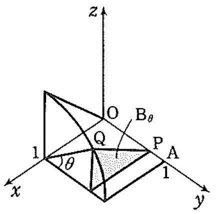



**注**　この包絡線は**エピサイクロイド**と呼ばれる曲線であり，$x=\left(1-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)\cos\theta$ の最大値を与える $\theta$ の値は $\theta=\pi/4$ である．また，①という考え方は重要で包絡線の本質をついている．

以上で，冒頭に述べたような，正面きってエピサイクロイドを解明したい，という筆者の欲求が満たされたことになります．筆者はエピサイクロイドを正面きって解説したものを見たことはありません．それが既にあるのでしたなら是非御教示頂きたいと

思います．上の考え方①や解は高校生にも理解できるものであると信じます．

**問2**　Oを原点とする座標空間内に4分円 $C: y^2+z^2=1,\ x=1,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0$ と点A $(0,\ 1,\ 0)$ があり，線分OA上の動点P $(0,\ \cos\theta,\ 0)$ と，$C$ 上の動点 $\mathrm{Q}(1,\ \cos\theta,\ \sin\theta)$ がある．$\theta$ が0から $\dfrac{\pi}{2}$ まで変化するときの線分PQの集合をSとすると，Sはある曲面であるが，これと $xy$ 平面，$zx$ 平面および平面 $x=1$ とで囲まれる立体を $\Sigma$ とする．




いま $\Sigma$ を平面 $y=\cos\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ で切ったとき，切り口に現れる図形の板 $B_\theta$ を，直線 $y=\cos\theta,\ z=0$ を軸として，$y$ 軸の正の向きとのなす角が $\theta$ となるまで回転して得られる図形の板を $B'_\theta$ とする〔ただし，$B'_\theta$ は領域 $z\geqq 0$ 内にあるものとし，板 $B_\theta$ や $B'_\theta$ の厚みは無視する（すなわち0であると考える）〕．

$\theta$ が $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，$B'_\theta$ が掃いて得られる立体を $\Sigma'$ として，$\Sigma'$ の体積を $V'$，$\Sigma$ の体積を $V$，OAを一辺とする立方体の体積を $V_0$ とするとき，$V'=\dfrac{1}{3}(V_0+V)$ であることを示せ．

**解**　直線 $x=u,\ y=\cos\theta$ とSとの交点 $\mathrm{P}_{u,\theta}$ の座標は $(u,\ \cos\theta,\ u\sin\theta)$ であるから，$B_\theta$ を回転して $B'_\theta$ としたとき，点 $\mathrm{P}_{u,\theta}$ が点 $\mathrm{P}'_{u,\theta}$ に移るものとすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}'_{u,\theta}}=\begin{pmatrix}u\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \cos\theta\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ u\sin\theta\cos\theta\\ u\sin^2\theta\end{pmatrix}$$

$\therefore\ \mathrm{P}'_{u,\theta}(u,\ \cos\theta+u\sin\theta\cos\theta,\ u\sin^2\theta)$

よって，立体 $\Sigma'$ を平面 $x=u$ で切ったときの切り口の面積を $S(u)$ とすると，

$$S(u)=\int_0^u(\cos\theta+u\sin\theta\cos\theta)dz.$$

$$z=u\sin^2\theta,\qquad \begin{array}{c|c} z & 0\longrightarrow u\\ \hline \theta & 0\longrightarrow \frac{\pi}{2}\end{array}$$

$dz=2u\sin\theta\cos\theta d\theta$ であるから，

$$S(u)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+u\sin\theta\cos\theta)\cdot 2u\sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

よって，$\cos\theta=c,\ \sin\theta=s$ とおくと，

$$S(u)=2u\int_0^{\frac{\pi}{2}}sc^2d\theta+2u^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sc)^2d\theta.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}sc^2d\theta=-\int_1^0 v^2dv=\frac{1}{3},$$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sc)^2d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta\, d\theta \text{ であるから，}$$

$$S(u)=\frac{2}{3}u+\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta\, d\theta\right)u^2.$$

$$\therefore\ V'=\int_0^1 S(u)du=\frac{1}{3}\left(V_0+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta\, d\theta\right)\ \cdots\ ①$$

〔$\because\ V_0=1$〕

次に，立体 $\Sigma$ を平面 $x=u$ で切ったときの切り口の面積を $T(u)$ とすると，

$$T(u)=\int_0^u\cos\theta\, dz.$$

$$z=u\sin\theta,\ dz=u\cos\theta\, d\theta,\qquad \begin{array}{c|c} z & 0\longrightarrow u\\ \hline \theta & 0\longrightarrow \frac{\pi}{2}\end{array}$$

〔$\because\ \mathrm{P}_{u,\theta}(u,\ \cos\theta,\ u\sin\theta)$〕　であるから，

$$T(u)=u\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\, d\theta$$

$$\therefore\ V=\int_0^1 T(u)dt=\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\, d\theta\right)\int_0^1 u\, dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\, d\theta\qquad\cdots\cdots\ ②$$

①，②より $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta\, d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\, d\theta$　$\cdots\cdots$ ③

を示せばよいが，③の左辺で $2\theta=\dfrac{\pi}{2}-\varphi$ と変数変換すると，$d\theta=-\dfrac{1}{2}d\varphi$，$\begin{array}{c|c} \theta & 0\longrightarrow \frac{\pi}{2}\\ \hline \varphi & \frac{\pi}{2}\longrightarrow -\frac{\pi}{2}\end{array}$ により

$$③\text{の左辺}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)d\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\, d\varphi=③\text{の右辺}$$

となって③は成り立つ．　（解終）

**注**　$V=\dfrac{\pi}{8}$ は明らかである（なぜか？積分計算など不必要！）から，$V'=\dfrac{1}{3}+\dfrac{\pi}{24}$ となる．

筆者は一浪の頃，4分球に対して，この問題(切り口を回転させたものが掃いて得られる立体の体積の求積問題)を作ろうとしましたが当時はうまくいかなかったのです．もちろん今でもうまくいきません．そこで，この問題をうまく解けるようにして，なおかつ，興醒めしないような立体として$\Sigma$を導入したのです．立体$\Sigma$はこの問題のために丁度うまくいくような立体でして，この問題のために存在すると言っても過言ではないと思います．上の注で，$V=\dfrac{\pi}{8}$ は明らかである(なぜか？積分計算など不必要！)といったことについて説明しましょう：

PQを斜辺とする直角三角形の面積をPの$y$座標$t$で表したものを$U(t)$，PQを対角線とする長方形の面積を同じ$t$で表したものを$V(t)$とするとき$0\leqq t\leqq 1$ なる任意の$t$に対して $U(t)=\dfrac{1}{2}V(t)$ であり，$\displaystyle\int_0^1 V(t)dt=\frac{\pi}{4}$(＝半径1，高さ1の4分円柱の体積)であるから，$V=\dfrac{\pi}{8}$ となるのです．

$V'=\dfrac{1}{3}(V_0+V)$ は図形的意味づけは難しいと思いますが美しい関係式であると思います．$\Sigma'$のような複雑な立体(これは，説明するのが面倒なので割愛しますが，とても複雑な形をしています！)の体積が$\Sigma$の体積と1辺の長さ1の立方体の体積の和の$\dfrac{1}{3}$となるのですから，これだけである種の調和を感じることができるでしょう！「$V'$を求めよ.」では単なる計算問題ですが，「$V'=\dfrac{1}{3}(V_0+V)$ を示せ.」としたので，最小限の計算ですんでいます．実際，上の解では$S(u)$や$T(u)$をパラメータ積分表示してはいますが，積分そのものを計算してはいません．上の解では$V$の値すら求めていませんが，$V'=\dfrac{1}{3}(V_0+V)$ を示したことと注とによって，$V'$まで求まってしまいます．

問2の立体$\Sigma$と，問1の包絡線とを融合させた問題を次に紹介しましょう：

**問3**　座標空間内に4分円 $C: x^2+y^2=1,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0$ と点A$(0,\ 0,\ 1)$，B$(1,\ 0,\ 1)$があり，$C$上の動点P$(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$と，線分AB上の動点Q$(\cos\theta,\ 0,\ 1)$がある．$\theta$が0から$\pi/2$まで変化するときの線分PQの集合をSとすると，Sはある曲面であるが，これと$xy$平面，$yz$平面および$zx$平面とで囲まれる立体を$\Sigma$とする．

$xy$平面上の曲線

$C': x=\left(1-\dfrac{1}{2}\cos 2\theta\right)\cos\theta,\ y=\sin^3\theta$ 上の動点P$'\left(\left(1-\dfrac{1}{2}\cos 2\theta\right)\cos\theta,\ \sin^3\theta,\ 0\right)$と線分AB上の動点Q$'\left(\left(1-\dfrac{1}{2}\cos 2\theta\right)\cos\theta,\ 0,\ 1\right)$とを結ぶ線分P$'$Q$'$の，$\theta$が0から$\pi/2$まで変化するときの集合をS$'$とすると，S$'$もある曲面であるが，このS$'$は立体$\Sigma$の体積を何対何の比に分けるか．ただし，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta \quad\cdots\cdots ①$$

を用いてよい．

**解**　曲線$C'$と$x$軸および$y$軸とで囲まれた領域をDとするとき，$C'$上の動点P$'$を通り$y$軸に平行な直線とDとの共通部分であるところの線分を底辺とし，高さが1であるような三角形の面積の総和$\left(ただし，\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\ とする\right)$が曲面S$'$と$xy$平面，$yz$平面および$zx$平面とで囲まれる立体$\Sigma'$の体積$V'$を表し，4分円$C$上の動点Pから$x$軸へ下ろした垂線の足をHとするとき，線分PHを底辺とし，高さが1であるような三角形の面積の総和$\left(ただし，0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\ とする\right)$が立体$\Sigma$の体積$V$を表すから，

$$V':(V-V')$$

を求めればよいが，以上の考察により，これは

D の面積：(半径1の4分円の面積－D の面積)

に等しい．D の面積は

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\left(1-\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta\,d\theta-\frac{3}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2 2\theta\cos 2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta-\frac{3}{16}\int_0^{0}t^2dt\ 〔\because ①〕$$

であって，半径1の4分円の面積は，$C$の媒介変数表示から $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$ であるから，求める比は**3：1**

Rを実数全体の集合とし，実数を成分とする

$2\times2$ 型の行列全体の集合を $\mathsf{M}_2(\mathsf{R})$ で表す．行列 $\alpha$ の行列式を $\det(\alpha)$，トレースを $\mathrm{tr}(\alpha)$ で表し，

$\mathrm{GL}_2^+(\mathsf{R})=\{\alpha\in\mathsf{M}_2(\mathsf{R})\,|\,\det(\alpha)>0\}$

とおく．また，$x(\in\mathsf{R}\cup\{\infty\})$ と

$\alpha=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}(\in\mathrm{GL}_2^+(\mathsf{R}))$ とに対し，$\alpha x=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ と定める．

ただし，$c=0$ のとき $ad>0$ であるから，

$$\alpha\infty=\frac{a\infty+b}{0\infty+d}=\infty,$$

$c\neq0$ のとき

$$\alpha\infty=\frac{a\infty+b}{c\infty+d}=\frac{a+\dfrac{b}{\infty}}{c+\dfrac{d}{\infty}}=\frac{a}{c},$$

$$\alpha\left(-\frac{d}{c}\right)=\frac{-\dfrac{ad-bc}{c}}{0}=\infty$$ と定める．

更に，$x(\in\mathsf{R}\cup\{\infty\})$ に対し，

$\mathrm{GL}_2^+(\mathsf{R})_x=\{\alpha\in\mathrm{GL}_2^+(\mathsf{R})\,|\,\alpha x=x\}$，

$\mathrm{GL}_2^+(\mathsf{R})_x^{(p)}=\{\alpha\in\mathrm{GL}_2^+(\mathsf{R})_x\,|\,\mathrm{tr}(\alpha)^2=4\det(\alpha)\}$

とおく．このとき，

**問4**　任意の $x(\in\mathsf{R}\cup\{\infty\})$ に対して，

$\alpha,\ \beta\in\mathrm{GL}_2^+(\mathsf{R})_x^{(p)}\Longrightarrow\alpha\beta^{-1}\in\mathrm{GL}_2^+(\mathsf{R})_x^{(p)}$

を示せ．ただし，

$(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$

$(\alpha,\ \beta\in\mathrm{GL}_2^+(\mathsf{R}),\ x\in\mathsf{R}\cup\{\infty\})$，

$\mathrm{GL}_2^+(\mathsf{R})_\infty^{(p)}=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}\middle|\ a,\ b\in\mathsf{R}\ かつ\ a\neq0\right\}$

であることを用いてよい．

**証明**　$x=\infty$ のときは容易である．

$x\in\mathsf{R}$ のとき，$\gamma=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -x\end{pmatrix}$ とおくと，$\gamma$，

$\gamma^{-1}=\begin{pmatrix}-x & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}_2^+(\mathsf{R})$．この $\gamma$ に対して，まず，

$1^\circ$(１度)　$\mathrm{GL}_2^+(\mathsf{R})_x=\{\gamma^{-1}\delta\gamma\,|\,\delta\in\mathrm{GL}_2^+(\mathsf{R})_\infty\}$

を示そう：実際，$\gamma^{-1}\infty=x$，$\gamma x=\infty$ であり，

$\alpha\in\mathrm{GL}_2^+(\mathsf{R})_x\iff\alpha\in\mathrm{GL}_2^+(\mathsf{R})_{\gamma^{-1}\infty}\iff\alpha\in\mathrm{GL}_2^+(\mathsf{R})$ かつ $\alpha(\gamma^{-1}\infty)=\gamma^{-1}\infty\Longrightarrow\alpha\in\mathrm{GL}_2^+(\mathsf{R})$ かつ $\gamma((\alpha\gamma^{-1})\infty)=(\gamma\alpha\gamma^{-1})\infty=\gamma(\gamma^{-1}\infty)=\infty$

$\Longrightarrow\alpha\in\mathrm{GL}_2^+(\mathsf{R})$ かつ $\gamma\alpha\gamma^{-1}\in\mathrm{GL}_2^+(\mathsf{R})_\infty$

$\Longrightarrow\alpha\in\{\gamma^{-1}\delta\gamma\,|\,\delta\in\mathrm{GL}_2^+(\mathsf{R})_\infty\}$，逆に，

$\alpha=\gamma^{-1}\delta\gamma$ かつ $\delta\in\mathrm{GL}_2^+(\mathsf{R})_\infty\Longrightarrow\alpha\in\mathrm{GL}_2^+(\mathsf{R})$ かつ $\alpha x=\gamma^{-1}(\delta(\gamma x))=\gamma^{-1}(\delta\infty)=\gamma^{-1}\infty=x$

$\Longrightarrow\alpha\in\mathrm{GL}_2^+(\mathsf{R})_x$ であるから $1^\circ$(１度)が成り立つ．

$2^\circ$(２度)　$\mathrm{GL}_2^+(\mathsf{R})_x^{(p)}=\{\gamma^{-1}\delta\gamma\,|\,\delta\in\mathrm{GL}_2^+(\mathsf{R})_\infty^{(p)}\}$

を示そう：実際，$\alpha(\in\mathrm{GL}_2^+(\mathsf{R})_x^{(p)})$ がスカラー行列であるとすると，$1^\circ$(１度)により，$\alpha=\gamma^{-1}\delta\gamma$ かつ $\delta\in\mathrm{GL}_2^+(\mathsf{R})_\infty$ のとき，$\delta=\gamma\alpha\gamma^{-1}=\alpha$ となるから，$\delta$ もスカラー行列であり，$\delta\in\mathrm{GL}_2^+(\mathsf{R})_\infty^{(p)}$．

また，$\alpha$ がスカラー行列でないとすると，$\alpha$ は固有値重解の行列であり，その固有値は0でない〔$\because$ $\det(\alpha)\neq0$〕から，$\alpha$ による原点を通る不動直線はただ１本であり〔$\because$ 数研通信 No.17 の筆者の記事を参照〕，その傾きは $1/x$ $(1/0=\infty)$ である．

よって，$\alpha=\gamma^{-1}\delta\gamma$ かつ $\delta\in\mathrm{GL}_2^+(\mathsf{R})_\infty$ のとき $\delta=\gamma\alpha\gamma^{-1}$ による原点を通る不動直線もただ１本で，

$\because$ $\gamma x=y$ とおくと $y\in\mathsf{R}\cup\{\infty\}$ であり，$\delta y=(\gamma\alpha\gamma^{-1})y=\gamma(\alpha(\gamma^{-1}(\gamma x)))=\gamma(\alpha x)=\gamma x=y$ であるから，原点を通る傾き $1/y$ の直線は $\delta$ による不動直線である．

$\because$ $\delta\begin{pmatrix}y\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}py+q\\ ry+s\end{pmatrix}$，

$\delta y=\dfrac{py+q}{ry+s}=\dfrac{y}{1}$

いまもし，$\delta$ による原点を通る不動直線が２本存在するとし，その傾きを $1/y$，$1/y'$ $(y,\ y'\in\mathsf{R}\cup\{\infty\})$ とすると $y\neq y'$ であるから，$x=\gamma^{-1}y$，$x'=\gamma^{-1}y'$ とおくと $x\neq x'$ である．更に $\delta y=y$，$\delta y'=y'$ である．

よって，$\alpha x=\gamma^{-1}\delta\gamma\gamma^{-1}y=\gamma^{-1}\delta y=\gamma^{-1}y=x$，$\alpha x'=x'$；$x$，$x'\in\mathsf{R}\cup\{\infty\}$であるから，$\alpha$ による原点を通る不動直線は，その傾きが $1/x$，$1/x'$ のもの２本となり矛盾する．

$\delta$ は相異なる２つの実固有値 0，$p$ をもつか，$\delta$ はスカラー行列ではなく固有値重解の行列であって，その固有値は0でないかのいずれかであるが，$\det(\delta)=\det(\gamma)\det(\alpha)\det(\gamma^{-1})\neq0$ により，$\delta\in\mathrm{GL}_2^+(\mathsf{R})_\infty^{(p)}$ となり $2^\circ$(２度)の $\subseteqq$ が成り立つ．同様にして $2^\circ$(２度)の $\supseteqq$ も成り立つ．そして $2^\circ$(２度)により示したいことが示される．

(静岡県立 沼津東高等学校)