教科外教科

補　助　線

さかもと　しげる
坂本　茂

名選手は必ずしも名監督あるいは優れた指導者ではないといわれる．大数学者も優秀な教育者でないことがあると考えられがちである．数学者は新しい定理を考え証明することであり，数学について語ることではないと思われがちである．しかし，大数学者のことを調べていくと意外な側面に出会うものである．

大数学者で優秀な教師や数学と教育の両方に情熱を注いだ人も数多くいる．早世したアーベルは教師としても優秀だった．ルベークも教育に力を注いだ．最近ではG. ポリアもそうであった．そしてあまり知られていないかもしれないが，ニュートンもオイラーもほんの初等的な子供向けの問題を作り，それに丁寧な例解をしているそうである．しかも彼等はそれを，自分の威信に関わることだとは思わなかったのである．私はなかなか入手しにくいがそのような非常に易しい問題を学校の考査試験に出題することもある．

数学への興味を学校以外の所で得たことが少なくなかった．以下に掲げた問題は学校の正規の教材とは違うが時々生徒に話す問題であり，生徒から挑戦された問題もある．

1．虫食い算

次のような“7”だけが分かっている割り切れる割り算で，空欄を求めよう．ただし，空欄の最初はどれも0ではないものとする．これは，かつて実際に生徒から持ち寄られた問題である．なお，記号[ ]は，例えば a，b，c が自然数のとき

$$[abc]=a\times10^2+b\times10+c$$

を表すことに用いるものとする．

$$
\begin{array}{r}
\square 7 \square\square\square \\
\square\square\square\overline{)\square\square\square\square\square\square\square\square} \\
\underline{\square\square\square\square} \\
\square\square\square \\
\underline{\square\square\square} \\
\square\square\square\square \\
\underline{\square\square\square} \\
\square\square\square\square \\
\underline{\square\square\square\square} \\
0
\end{array}
$$

これを次のようにおくことができるだろう．

$$
\begin{array}{rll}
q_1\,7\,q_2q_3q_4 & \text{——} & v \\
u-p_1p_2p_3\overline{)a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8} & \text{——} & x_1 \\
\underline{b_1b_2b_3b_4} & \text{——} & x_2 \\
c_1c_2a_5 & \text{——} & x_3 \\
\underline{d_1d_2d_3} & \text{——} & x_4 \\
e_1e_2e_3a_6 & \text{——} & x_5 \\
\underline{f_1f_2f_3} & \text{——} & x_6 \\
g_1g_2a_7a_8 & \text{——} & x_7 \\
\underline{g_1g_2a_7a_8} & \text{——} & x_7 \\
0 & &
\end{array}
$$

まず最初に $100\leqq 7u=x_4\leqq 999$ で，これを7で割って $\dfrac{100}{7}\leqq u\leqq\dfrac{999}{7}<143$　よって $100\leqq u\leqq 142$ となり $p_1=1$ である．また $1000\leqq q_1u=x_2\leqq 9999$ であるから，$1000\leqq q_1u\leqq 142q_1$ により $q_1=8,\ 9$ である．もし $q_1=8$ ならば $x_2=uq_1\leqq 142\times 8=1136$ であり，もし $q_1=9$ ならば

$x_2=uq_1\leqq 142\times 9=1278$ であるから

$b_1=1$，$b_2=0,\ 1,\ 2$ である．

$x_4=7u\leqq 7\times 142=994$，$x_4=7u\geqq 7\times 100=700$ であり $d_1=7,\ 8,\ 9$ である．

したがって $c_1=8,\ 9$ であり $e_1=1,\ 2$ である．それゆえ $7u=x_4\leqq 899$ であるから $u\leqq 128$ となる．また $10\leqq x_5-x_6\leqq 99$ であり

$x_5\leqq x_6+99\leqq 999+99=1098$ であり $e_1=1$，$e_2=0$ である．$x_6\geqq x_5-99\geqq 1000-99=901$ から $f_1=9$ である．

よって $901 \leqq x_7 = uq_2 \leqq 128q_2$ であるから
$q_2=8,\ 9$ であることが分かる．
$[g_1g_2a_7] \leqq 127 < 128$ であり，$g_1=1$ である．

$$x_5 - x_6 = 100 + [e_3a_6] - [f_2f_3] = [1\ g_2]$$

$$100 + 10 \times e_3 + a_6 = 10 \times (f_2+1) + (f_3+g_2)$$

であることから，$f_2=9,\ 8$ であり $e_3=0,\ 1$ である．更に $1000 \leqq x_7 = uq_4 \leqq 128q_4$ であるから
$q_4=8,\ 9$ である．すなわち $q_1,\ q_2,\ q_4$ は8または9である．$x_2,\ x_7$ は4桁の数で x_6 は3桁の数であるから
$q_1=q_4=9,\ q_2=8$ であることがいえて，$v=97809$ である．$128 \times 9 = 1152$ であるから $b_2=g_2\,(x_2=x_7)$ は0か1である．x_6 は8で割り切れなければならない．よって x_6 は984または992である．984ならば $u=123$ で
$x_7=1107$，これから $x_5=x_6+11=995$ は3桁の数で適さない．

$x_6=992$ であれば $u=124$，
$x_8=9u=1116$ であり
$x_5=992+11=1003$ は4桁である．これより

$$124 \times 97809 = 12128316$$

はこの問題の解であることが確かめられ，これが唯一の解である．

```
          97809
124) 12128316
      1116
        968
        868
       1003
        992
        1116
        1116
           0
```

2. 積分による対数の定義

$x>0$ のとき $\int_1^x \frac{dt}{t}$ により対数 $\log x$ を定義したとしよう．
したがって $\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x}$ である．

$x>0,\ y>0$ のとき

$$\frac{d}{dx}\log xy = \frac{1}{xy}\cdot y = \frac{1}{x}$$

であるから $\log xy = \log x + c$ となる．また

$$\log 1 = \int_1^1 \frac{dt}{t} = 0$$

であるから $x=1$ とおいて
$\log y = \log 1 \cdot y = \log 1 + c = c$ であり
$x=\frac{1}{y}$ とおくと $0=\log 1=\log\frac{1}{y}y=\log\frac{1}{y}+c$ であるから

$$\log xy = \log x + \log y, \qquad \log\frac{1}{y} = -\log y$$

が成り立つ．

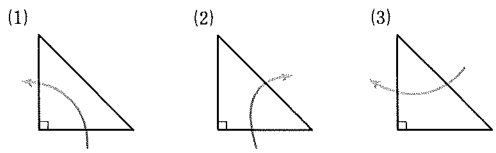
積分を微分より先に教えると，面積あるいは測度の考えに及び，その逆の微分は接線の傾きよりも広い意味で考えられるようになる．また，この対数の定義はその1例である．

3. ペアノの曲線

直角二等辺三角形を次々と2等分していって，もとの直角二等辺三角形の 2^n 等分を作る．2^n 等分された三角形に0から 2^n-1 まで番号を付けるのに，番号が1つ違いのものは必ず1辺で接しているようにする．すなわち隣り合うように番号を付けるものとする．

2^n 個の三角形内に1点を取り，それらの点を番号順に線で結べばこの線は連続な曲線となる．また，この曲線は番号順に方向をもっている．曲線の両端を除けば1つの三角形にはこの曲線が入る辺と出る辺があるから，これを入辺，出辺とそれぞれ名付ける．入辺と出辺の辺として次の3通りに場合分けできる．

(1) 入辺，出辺が直角を挟む2辺である場合
(2) 入辺が直角を挟む1辺，出辺が斜辺の場合
(3) 入辺が斜辺，出辺が直角を挟む1辺の場合



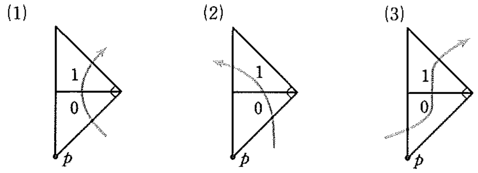
さて，ここで番号を付けるのに2進法を使う．2^n 等分された三角形には n 桁の数が番号として対応するがこれを小数点以下 n 桁の番号でよぶ．このとき次の定理が成り立つ．

直角二等辺三角形を 2^n 等分して隣り合うように番号を付ける付け方は，逆を除けば少なくとも1通りは存在し，そして1つに限る．

≪証明≫ 帰納法で証明しよう．$n=1$ のときは明らかである．

$n=k$ のとき番号付けが存在したとする．2^k 等分された三角形で(1)，(2)，(3)の場合があるが，その三角形が2進法で k 桁の p という数で表されていたとすると，$p\times 2+0$ と $p\times 2+1$ との三角形を決める決

め方は1通りである．



［証終］

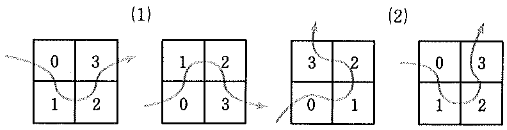
三角形の番号pに対応する点は，図にあるような点にnを無限に大きくしたとき収束する．このことはnを無限に大きくしたとき，0から1までの実数と三角形内の点とが対応することを示していて，しかも連続な曲線で結ばれている．

なお，この曲線は同じ点を2回以上通ることがある．

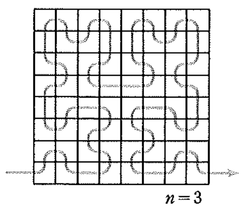
正方形など四角形で考える場合は4進法で対応する数を表すとよい．入辺，出辺について2通りの場合がある．

(1) 出辺と入辺が正方形の対辺の場合

(2) 出辺と入辺が正方形の隣辺の場合

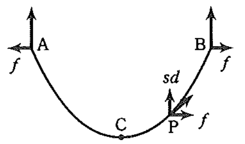


2^n等分された三角形（$n=1$, 2, …；2^n-1個の三角形）にそれぞれ入辺，出辺の数を1つずつ与える線は1つに限る．4^n等分された四角形（$n=1$, 2, …；4^n-1個の正方形）にそれぞれ入辺と出辺の数を1つずつ与える線は1つに限る．ただし，最初と最後の正方形は固定する．例えば，正方形の中心には3実数$\frac{1}{6}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$が対応している．



4．懸垂線

一様な糸の両端を同じ高さに持ってぶら下げたとき，糸はどんな曲線を作るか．



任意の点に働く力で横方向の成分は同じであるからこれをfとしよう．縦方向の力は中心Cからの糸の重さに等しいから，糸の密度d，$\overset{\frown}{\mathrm{CP}}$の糸の長さを$s$とすれば，P($x$, y)では

$$s=\int_0^x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx,\quad \frac{sd}{f}=\frac{dy}{dx}$$

が成り立っている．$d/f=a$とおいて，微分すると

$$\frac{d^2y}{dx^2}=a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

である．$\frac{dy}{dx}=v$とおけば$\frac{dv}{dx}=a\sqrt{1+v^2}$となり

$$ax=\int\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}}=\int\frac{1+v^2}{\sqrt{1+v^2}}d\theta=\int\frac{d\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$$

よって　$e^{2ax}=\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$から$\sin\theta=\frac{e^{2ax}-1}{e^{2ax}+1}$である．$v=\tan\theta$，$x=0$のとき$v=\theta=0$

$$v^2=\frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}=\left(\frac{1-e^{2ax}}{2e^{ax}}\right)^2$$

$v=\frac{1}{2}(e^{ax}-e^{-ax})=\sinh ax$で$\frac{dy}{dx}=\sinh ax$であるから，求める曲線は$y=\frac{1}{a}\cosh ax\ (+c)$

すなわち$y=\frac{1}{2a}(e^{ax}+e^{-ax})$

5．部分集合の個数

n個の要素からなる集合$\mathrm{S}=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$の部分集合の個数を考える．$i=1$, 2, …, nのそれぞれについてa_iを部分集合の要素に入れるか入れないかで2通りあるから，全部分集合の個数は空集合および集合Sも含めて2^nである．一方，部分集合の要素の個数がr個のものは${}_n\mathrm{C}_r$個であるからSの全部分集合の個数は${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n$である．

したがって，等式${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=2^n$

が成り立つことがわかる．また，これは二項定理による等式

$$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$$

において，$x=1$とおいて得られるものである．

（東京都立 鷺宮高等学校）