図にあらわれる「相加平均≧相乗平均」

田島（たじま） 宅二（たくじ）

1. その教材研究の動機

生徒にとって，「平均」といえば「ならすこと」であり，「算術平均（相加平均）」的なことしか脳裏に浮かばないのを常とする．「相乗平均」の実感がわかないのである．

$\dfrac{a+b}{2}$ はいかにも a と b の平均らしい姿をしているが，$\sqrt{ab}$ ともなると全く平均らしくない姿なのである．しかし，その名は「相乗平均」と呼ばれて，世の中を罷り通っている．教科書（本校は数研出版）を見ても不等式の証明としてまた不等式の基本定理として扱い，図示することはない．教師側としても，

$a>0$，$b>0$ のとき，$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ を証明するのに

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{(\sqrt{a})^2-2\sqrt{ab}+(\sqrt{b})^2}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0$$

ゆえに $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$

（ただし，等号は $a=b$ のとき成立）

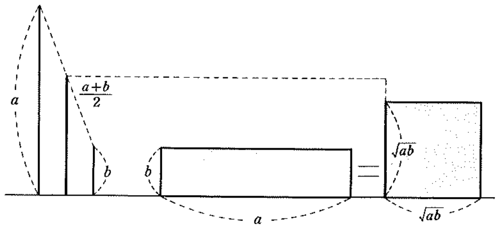
として通り過ぎてしまうことが多い．

この「相加平均≧相乗平均」の指導としてまた教材研究として，これで終わってよいものだろうか．もっと実感のこもる指導はないものだろうか，そしてもっと興味のある指導はないものだろうかと考えたのである．

それには「相加平均≧相乗平均」を図示することだと思った．

2. 相加平均≧相乗平均 の図示

その1(i) $a>b>0$

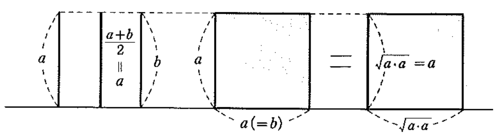


$a+b=$(一定)

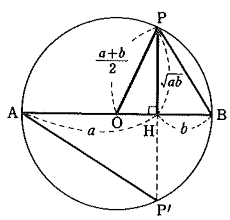
その1で「相加平均」は長さの和を一定にして2つの長さを平均する．「相乗平均」は長さの積を一定にして（つまり面積を一定にして）2つの長さ（縦と横）を平均する．

それは $\dfrac{ab}{2}$ ではなくて $\sqrt{ab}$ であることが図からよくわかるのである．しかし，この図「その1(i)」は，この定理を証明しているものではない．

その1(ii) $a=b>0$



その2(i)



$\triangle PHB \backsim \triangle AHP'$ であるから

$PH : AH = HB : HP'$

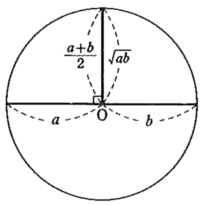
また $HP' = PH$

ゆえに $PH^2=AH\cdot HB$（方べきの定理）

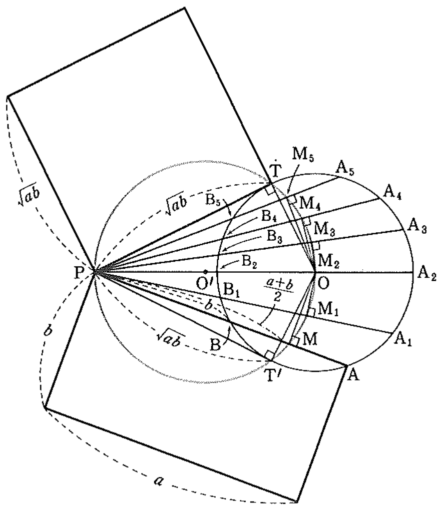
直径 $AB(=AH+HB)=a+b$，半径 $OP=\dfrac{a+b}{2}$，

$PH=\sqrt{ab}$ となるから斜辺 OP の直角三角形 OPH で $OP>PH$ により $\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$ の証明ができる．

$\boxed{\text{その 2 (ii)}}$ $a=b$



$\boxed{\text{その 3}}$



円O外の点Pから接線 PT と割線 PBA を図のように引く．（A，B は円Oとの交点） $PA=a$，$PB=b$ とおくと，方べきの定理により

$$PT^2=PA\cdot PB$$

ゆえに　$PT=\sqrt{ab}$

また，弦 AB の中点をMとすると $PM=\dfrac{a+b}{2}$

となる．

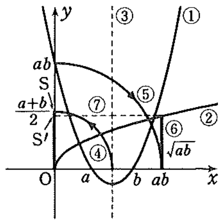
図その 3 では方べきの定理そのものも

（正方形の面積）=（長方形の面積） として示した．

この図は，$\dfrac{a+b}{2}$ の最小値が $\sqrt{ab}$ であることも示している．

そして a の値を PA，PA_1，PA_2，PA_3，PA_4，PA_5 と変数ととらえ，また b の値を PB，PB_1，PB_2，PB_3，PB_4，PB_5 と変数ととらえると $\dfrac{a+b}{2}$ が弧 T′OT の軌跡となることも興味深い．

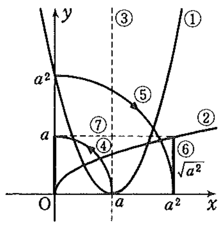
$\boxed{\text{その 4 (i)}}$ $b>a>0$



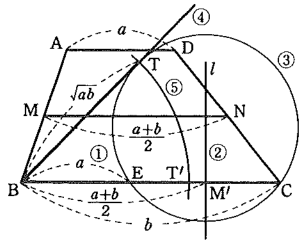
これは，2 次関数 $y=x^2-(a+b)x+ab$ と無理関数 $y=\sqrt{x}$ $(x\geqq 0)$ とでできる $\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$ である．

差が SS′ のところに示される．丸囲みの数①～⑦は図をかく順序である．

$\boxed{\text{その 4 (ii)}}$ $a=b>0$



$\boxed{\text{その 5 (i)}}$ $b>a>0$



AD∥BC

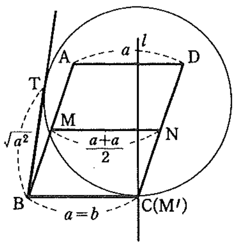
AM=BM　　CN=DN　　　　$l\perp BC$，EM′=M′C

$BT^2=BE\cdot BC$（方べきの定理）　AD=a，BC=b

台形 ABCD で BC 上に AD=BE=a となるEをとる．次に EC の垂直二等分線 l を引く．l 上の任意の点を中心にE，C を通る円をかく．Bから，この円に接線 BT を引く．Bを中心に半径 BT の円をかき，BC との交点を T′ とする．T′M′ が

$\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}$ となってあらわれる．

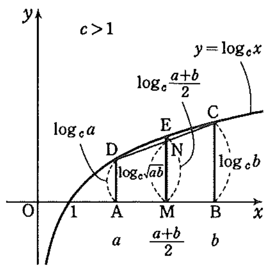
$\boxed{\text{その 5 (ii)}}$ $a=b>0$



AD∥BC　　AM＝BM　　$l\perp$BC(M′)
AD＝BC　　DN＝CN

$\boxed{\text{その 6}}$ $b>a>0$

その 5 までは相加平均と相乗平均が図に直接表れている場合であったが，その 6 は対数関数を用いて間接的にそれが表れているものである．



台形 ABCD で AD∥BC，AM＝BM，DN＝CN，また DA，EM (NM)，CB は x 軸に垂直である．

$$\mathrm{MN}=\frac{\log_c a+\log_c b}{2}=\frac{\log_c ab}{2}=\frac{1}{2}\log_c ab$$

$$=\log_c(ab)^{\frac{1}{2}}=\log_c\sqrt{ab}$$

$$\mathrm{ME}=\log_c\frac{a+b}{2}$$

ME＞MN であるから

$$\log_c\frac{a+b}{2}>\log_c\sqrt{ab}$$

ゆえに $\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$

また $a=b$ のときは明らかに

$$\log_c\frac{a+b}{2}=\log_c\sqrt{ab}$$

ゆえに $\dfrac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$

以上まとめて $\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$

(静岡学園高等学校)