整数辺直角三角形

特に原始ピタゴラス三角形の三進樹による生成と $\sqrt{2}$ の構成的新近似法について

亀井(かめい)　喜久男(きくお)

私は，91 年秋に全国私学研数学分科会において，直角二等辺三角形に向かっていく原始ピタゴラス三角形列を構成するトロイカ漸化式を発表した．

少し説明を加えると，3，4，5 は直角三角形を形成する 3 辺であるが，直角を挟む 2 辺の差が 1 であるような整数辺直角三角形はフェルマーが証明したように無数に存在する．次は 20，21，29 であり，その次は 119，120，169 であり，次は 696，697，985 である．

この系列に大変おもしろい性質がある．

$a_0=0,\ b_0=1,\ c_0=1$

$a_1=3,\ b_1=4,\ c_1=5$ とすると，

隣接 3 項のトロイカ漸化式が存在し，

$$\begin{cases} a_{n+2}=6a_{n+1}-a_n+2 \\ b_{n+2}=6b_{n+1}-b_n-2 \\ c_{n+2}=6c_{n+1}-c_n \end{cases}$$ となる．

新出ならば，亀井漸化式としたい．

このベクトル列は，なんと，$T_0=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ とすると，

$A=\begin{pmatrix}2&1&2\\1&2&2\\2&2&3\end{pmatrix}$ という行列を掛けるたびに

$T_1=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$，$T_2=\begin{pmatrix}20\\21\\29\end{pmatrix}$，$T_3=\begin{pmatrix}119\\120\\169\end{pmatrix}$ が，出てくる．

すなわち，$T_n=A^nT_0$ となるわけで，3 次元の等比数列がここに秘められているのである．

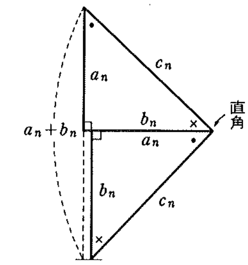
この三角形列は a_n，b_n の差が 1 のまま巨大化するので，ほぼ直角二等辺三角形になっていく．

このことと，図から

$$\frac{c_n}{a_n},\ \frac{a_n+b_n}{c_n},\ \frac{c_n}{b_n}$$

が $\sqrt{2}$ に向かって収束していくことがわかる．

初めのは上から，後の 2 つは下から近似するが真ん中のは収束がきわめて速いことは注目すべきだ．



ギリシアの頃すでに 3，4，5 から，$\frac{3+4}{5}$ として $\frac{7}{5}$ を $\sqrt{2}$ の近似に使っていた．

連分数近似の概念と違い，直角三角形を次々にもれなく構成しながら近似していくので，各ステップの意義が大きいことがこの方法の長所である．UBASIC の活用場所となっている．

1992年春，京都大学はユニークな入試問題を提出した．見て頂ければよいが，すべてのピタゴラス三角形が変換によって，3：4：5 または 4：3：5 になるという問題である．これが Hall の定理を背景にもつことを，最近になって知った．

Hall の定理とは，高校生にわかるよう書きかえれば，縦ベクトル $\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$ に

$K=\begin{pmatrix}-1&2&2\\-2&1&2\\-2&2&3\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&3\end{pmatrix}$，

$M=\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-1&2\\2&-2&3\end{pmatrix}$

を乗ずることで，三進樹の節点にすべての原始ピタゴラスを生成するというものである．(次の図)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & & \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} \arrow[dlll, dash, "K"'] \arrow[d, dash, "\Lambda"'] \arrow[drrr, dash, "M"] & & & & \\
 & \begin{pmatrix}15\\8\\17\end{pmatrix} \arrow[dl, dash, "K"'] \arrow[d, dash, "\Lambda"] \arrow[dr, dash, "M"] & & & \begin{pmatrix}21\\20\\29\end{pmatrix} \arrow[dl, dash, "K"'] \arrow[d, dash, "\Lambda"] \arrow[dr, dash, "M"] & & & \begin{pmatrix}5\\12\\13\end{pmatrix} \arrow[dl, dash, "K"'] \arrow[d, dash, "\Lambda"] \arrow[dr, dash, "M"] & \\
\begin{pmatrix}35\\12\\37\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}65\\72\\97\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}33\\56\\65\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}77\\36\\85\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}119\\120\\169\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}39\\80\\89\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}45\\28\\53\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}55\\48\\73\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}7\\24\\25\end{pmatrix}
\end{tikzcd}$$

この文の前半はオリジナルで喜んでいるが，Hall氏の仕事の方がもっとおもしろい．

さて，初めの三角形系列に話を戻すが，T_4として得られる696，697，985から$\sqrt{2}$のよい近似$\dfrac{1393}{985}$が得られる．

この分数の60進展開は，1；24，51，10，3，2であるが，有名なバビロニアの$\sqrt{2}$粘土板は，この4位以下の切り捨てではないかと考えてしまった．あの時代，整数辺直角三角形は，重視されていた．それだけが根拠の私の新説である（現在の学説はノイゲバウアー氏による）．アルゴリズムなしでも探索で696，697，985は得られると思う．諸兄はいかがが考えられるだろうか．

（富田学園 岐阜東高等学校）

[参考]　1992年 京都大学入試問題（前期日程理系6番）

a_1，b_1，c_1は正の整数で$a_1^2+b_1^2=c_1^2$を満たしている．$n=1$，2，…… について，a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1}を次の式で定める．　$a_{n+1}=|2c_n-a_n-2b_n|$，$b_{n+1}=|2c_n-2a_n-b_n|$，$c_{n+1}=3c_n-2a_n-2b_n$

(1)　$a_n^2+b_n^2=c_n^2$ を数学的帰納法により証明せよ．

(2)　$c_n>0$ および $c_n \geqq c_{n+1}$ を示せ．

(3)　$c_m>c_{m+1}=c_{m+2}$ となったときの m について，$a_m:b_m:c_m$ を求めよ．　（編集部注）