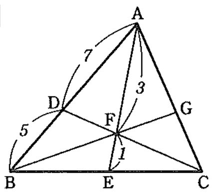
メネラウス・チェバの定理の拡張について

入砂（いりすな）　七五三一（しめいち）

〈はじめに〉　1993年のセンター試験の問題で，数II[1]〔2〕は，メネラウス・チェバの定理を用いると簡単にできるところがあります．生徒には，この定理は便利であることを日頃教えており，研究をしていました．この定理を拡張していくとある法則に到達したのであります．（資料1参照）

問題1

Fig 1



$\triangle$ABCで
　AD：DB＝7：5
　AF：FE＝3：1
のとき GF：FB
を求めよ．

この解答は，メネラウスの定理からチェバの定理，更にメネラウスの定理を用いる．つまり，定理を3回用いるのが一般的だが，次の式を用いると1回でできる．

$$\boxed{\mathrm{R_2}^3 \qquad \frac{AD}{DB}\cdot\frac{BG}{GF}\cdot\frac{FE}{EA}=1} \quad \text{から}$$

$$\frac{7}{5}\cdot\frac{BG}{GF}\cdot\frac{1}{4}=1 \qquad \text{ゆえに}\ \frac{BG}{GF}=\frac{20}{7}$$

　よって GF：FB＝7：13

この式はチェバの定理に含まれるものであるが，あえて私の証明をあげておく．

　Fig 1 で，AD：DB＝s：$(1-s)$
　　　　BE：EC＝t：$(1-t)$
　　　　CG：GA＝$(1-m)$：m
　　　　AF：FE＝$(1-l)$：l
　　　　BF：FG＝k：$(1-k)$

　とする．

$$K\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CF}\ \text{とおく．} \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\overrightarrow{CD}=(1-s)\overrightarrow{CA}+s\overrightarrow{CB} \qquad \cdots\cdots ②$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CF}&=k\overrightarrow{CG}+(1-k)\overrightarrow{CB}\\&=k(1-m)\overrightarrow{CA}+(1-k)\overrightarrow{CB} \qquad \cdots\cdots ③\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CF}&=l\overrightarrow{CA}+(1-l)\overrightarrow{CE}\\&=l\overrightarrow{CA}+(1-l)(1-t)\overrightarrow{CB} \qquad \cdots\cdots ④\end{aligned}$$

　①，②，③より $\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CB}$ は1次独立であるから，

$$\begin{cases}K(1-s)=k(1-m) & \cdots\cdots ⑤\\ Ks=1-k & \cdots\cdots ⑥\end{cases}$$

　①，②，④から

$$\begin{cases}K(1-s)=l & \cdots\cdots ⑦\\ Ks=(1-l)(1-t) & \cdots\cdots ⑧\end{cases}$$

　⑥から $\dfrac{1}{1-k}=\dfrac{1}{Ks}$　　⑦から $l=K(1-s)$

$$\text{よって}\ \frac{AD}{DB}\cdot\frac{BG}{GF}\cdot\frac{FE}{EA}=\frac{s}{1-s}\cdot\frac{1}{1-k}\cdot\frac{l}{1}$$

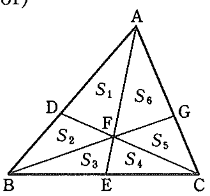
$$=\frac{s}{1-s}\cdot\frac{1}{Ks}\cdot K(1-s)=1$$

（証明終わり）

更に，次の式もメネラウスの定理に含まれるが，私の証明をあげておく．

$$\boxed{\mathrm{R_3}^3 \qquad \frac{AB}{BD}\cdot\frac{DC}{CF}\cdot\frac{FE}{EA}=1\ \text{を証明する．}}$$

(Proof)



　全体の面積をSとし，分割した面積を左図のようにすると，

$$\frac{AB}{BD}=\frac{S_1+S_2}{S_2}=\frac{S}{S_2+S_3+S_4}=k_1$$

$$\frac{DC}{CF}=\frac{S_1+S_5+S_6}{S_5+S_6}=\frac{S_2+S_3+S_4}{S_3+S_4}=k_2$$

$$\frac{FE}{EA}=\frac{S_4}{S_4+S_5+S_6}=\frac{S_3}{S_1+S_2+S_3}=k_3 \qquad \cdots\cdots ①$$

①から $S_3+S_4=S\cdot k_3$

ゆえに

$$k_1\cdot k_2\cdot k_3=\frac{S}{S_2+S_3+S_4}\cdot\frac{S_2+S_3+S_4}{S_3+S_4}\cdot\frac{S_3+S_4}{S}=1$$

（証明終わり）

次に用語を定義する．[Fig 1]で“返り点”について，点AからD，DからBならば，返り点はなし．点AからB，BからDならば，返り点は1つ．このように他の場合も定めると，R_0，R_1，R_2，R_3，R_4 はそれぞれその定理または式に返り点が0個，1個，2個，3個，4個あることを表している．
また，R_2^3 は，返り点が2つで3つの比の積，R_3^4 は，返り点が3つで4つの比の積，このように他も定める．次に返り点の類別をする．

チェバの定理

$$R_0^3 \quad \frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CG}{GA}=1$$

$$R_2^3 \quad \frac{AD}{DB}\cdot\frac{BG}{GF}\cdot\frac{FE}{EA}=1$$

メネラウスの定理

$$R_1^3 \quad \frac{AB}{BD}\cdot\frac{DF}{FC}\cdot\frac{CG}{GA}=1$$

$$R_1^3 \quad \frac{AD}{DB}\cdot\frac{BC}{CE}\cdot\frac{EF}{FA}=1$$

$$R_3^3 \quad \frac{AB}{BD}\cdot\frac{DC}{CF}\cdot\frac{FE}{EA}=1$$

$$R_2^4(1) \quad \frac{AB}{BD}\cdot\frac{DF}{FC}\cdot\frac{CB}{BE}\cdot\frac{EF}{FA}=1$$

$$R_2^4(2) \quad \frac{AD}{DB}\cdot\frac{BG}{GF}\cdot\frac{FD}{DC}\cdot\frac{CG}{GA}=1$$

$$R_2^4 \quad \frac{AD}{DB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CD}{DF}\cdot\frac{FE}{EA}=1$$

$$R_2^4 \quad \frac{AF}{FE}\cdot\frac{EC}{CB}\cdot\frac{BF}{FG}\cdot\frac{GC}{CA}=1$$

$$R_4^4 \quad \frac{AB}{BD}\cdot\frac{DC}{CF}\cdot\frac{FB}{BG}\cdot\frac{GC}{CA}=1$$

R^4 は（拡張定理）

$$R_3^5(1) \quad \frac{AB}{BD}\cdot\frac{DC}{CF}\cdot\frac{FG}{GB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CG}{GA}=1$$

$$R_3^5(2) \quad \frac{AB}{BD}\cdot\frac{DF}{FC}\cdot\frac{CE}{EB}\cdot\frac{BG}{GF}\cdot\frac{FE}{EA}=1$$

$$R_3^5 \quad \frac{AD}{DB}\cdot\frac{BG}{GF}\cdot\frac{FD}{DC}\cdot\frac{CB}{BE}\cdot\frac{EF}{FA}=1$$

$$R_2^5 \quad \frac{AB}{BD}\cdot\frac{DF}{FC}\cdot\frac{CE}{EB}\cdot\frac{BF}{FG}\cdot\frac{GC}{CA}=1$$

$$R_4^5 \quad \frac{AB}{BD}\cdot\frac{DC}{CF}\cdot\frac{FG}{GB}\cdot\frac{BC}{CE}\cdot\frac{EF}{FA}=1$$

R^5 は（拡張定理）

[Fig 1]でのすべての場合はこの類別表のいずれかに代表される．

次に主な拡張定理の証明を示す．R^4 は R^3 から証明され R^5 は R^4 と R^3 によって証明される．

R_2^4 $\quad \dfrac{AB}{BD}\cdot\dfrac{DF}{FC}\cdot\dfrac{CB}{BE}\cdot\dfrac{EF}{FA}=1$ の証明

(Proof)　R_1^3 から $\dfrac{AB}{BD}\cdot\dfrac{DF}{FC}\cdot\dfrac{CG}{GA}=1$

ゆえに（左辺）$=\dfrac{GA}{CG}\cdot\dfrac{CB}{BE}\cdot\dfrac{EF}{FA}=\dfrac{AG}{GC}\cdot\dfrac{CB}{BE}\cdot\dfrac{EF}{FA}$

R_1^3 から　$=1$　（証明終わり）

R_2^4 $\quad \dfrac{AF}{FE}\cdot\dfrac{EC}{CB}\cdot\dfrac{BF}{FG}\cdot\dfrac{GC}{CA}=1$ の証明

(Proof)　R_1^3 から $\dfrac{AF}{FE}\cdot\dfrac{EC}{CB}\cdot\dfrac{BD}{DA}=1$

ゆえに（左辺）$=\dfrac{DA}{BD}\cdot\dfrac{BF}{FG}\cdot\dfrac{GC}{CA}=\dfrac{AD}{DB}\cdot\dfrac{BF}{FG}\cdot\dfrac{GC}{CA}$

R_1^3 から　$=1$　（証明終わり）

R_4^4 $\quad \dfrac{AB}{BD}\cdot\dfrac{DC}{CF}\cdot\dfrac{FB}{BG}\cdot\dfrac{GC}{CA}=1$ の証明

(Proof)　R_3^3 から $\dfrac{AB}{BD}\cdot\dfrac{DC}{CF}\cdot\dfrac{FE}{EA}=1$

ゆえに（左辺）$=\dfrac{EA}{FE}\cdot\dfrac{FB}{BG}\cdot\dfrac{GC}{CA}=\dfrac{AE}{EF}\cdot\dfrac{FB}{BG}\cdot\dfrac{GC}{CA}$

R_3^3 から　$=1$　（証明終わり）

R_2^5 $\quad \dfrac{AB}{BD}\cdot\dfrac{DF}{FC}\cdot\dfrac{CE}{EB}\cdot\dfrac{BF}{FG}\cdot\dfrac{GC}{CA}=1$ の証明

(Proof)　R_2^4 から $\dfrac{AB}{BD}\cdot\dfrac{DF}{FC}\cdot\dfrac{CB}{BE}\cdot\dfrac{EF}{FA}=1$

ゆえに（左辺）$=\dfrac{BE}{CB}\cdot\dfrac{FA}{EF}\cdot\dfrac{CE}{EB}\cdot\dfrac{BF}{FG}\cdot\dfrac{GC}{CA}$

$=\dfrac{AF}{FE}\cdot\dfrac{EC}{CB}\cdot\dfrac{BF}{FG}\cdot\dfrac{GC}{CA}$

R_2^4 から　$=1$　（証明終わり）

R_3^5 $\quad \dfrac{AD}{DB}\cdot\dfrac{BG}{GF}\cdot\dfrac{FD}{DC}\cdot\dfrac{CB}{BE}\cdot\dfrac{EF}{FA}=1$ の証明

(Proof)　R_2^4 から $\dfrac{AD}{DB}\cdot\dfrac{BG}{GF}\cdot\dfrac{FD}{DC}\cdot\dfrac{CG}{GA}=1$

ゆえに（左辺）$=\dfrac{GA}{CG}\cdot\dfrac{CB}{BE}\cdot\dfrac{EF}{FA}=\dfrac{AG}{GC}\cdot\dfrac{CB}{BE}\cdot\dfrac{EF}{FA}$

R_1^3 から　$=1$　（証明終わり）

$R_4{}^5$ $\quad \dfrac{AB}{BD}\cdot\dfrac{DC}{CF}\cdot\dfrac{FG}{GB}\cdot\dfrac{BC}{CE}\cdot\dfrac{EF}{FA}=1$ の証明

(Proof) $R_4{}^4$ から $\dfrac{AB}{BD}\cdot\dfrac{DC}{CF}\cdot\dfrac{FB}{BG}\cdot\dfrac{GC}{CA}=1$

ゆえに (左辺)$=\dfrac{BG}{FB}\cdot\dfrac{CA}{GC}\cdot\dfrac{FG}{GB}\cdot\dfrac{BC}{CE}\cdot\dfrac{EF}{FA}$

$=\dfrac{AC}{CG}\cdot\dfrac{GF}{FB}\cdot\dfrac{BC}{CE}\cdot\dfrac{EF}{FA}$

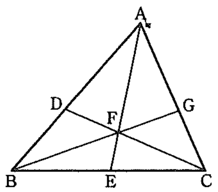
$R_2{}^4$ から $\quad =1$ (証明終わり)

以上のように証明することにより Fig 1 によるすべての拡張定理が証明されることになり，一般性のある法則に到達したわけです．ここに入砂の定理として発表します．

Irisuna の定理

1993. 2. 1

三角形 ABC の頂点 A, B, C と内部の点 F とを結ぶ直線が対辺 AB, BC, CA と交わる点をそれぞれ D, E, G とする．



点 P は△ABC の周および内部の線分上を動くものとする．点 P が線分 AD から DB あるいは線分 AB から BD へ動くとき“返り点”の個数は，それぞれ 0, 1 であるという．また，それぞれの線分の比を

$$\frac{AD}{DB},\ \frac{AB}{BD}$$

と表す．他の場合も同様に定めると，点 P が“返り点” 0 個 または 1 個で動くとき，点 A, B, C, D, E, F, G のどこから動いても再びもとの点にもどるならば，どんなときも線分の比の積は 1 である．

この定理は，メネラウス・チェバの定理を含んでいるので利用度は高いのではないかと思われます．なお，この定理の代表元として，その他 $R_4{}^5(A)$, $R_3{}^6(A)$, $R_5{}^6(A)$, $R_6{}^7(AE)$ があります．これらの説明や，この定理の一般的な証明については別の機会に是非発表したいと考えております．また，この定理の到達点をいかに教育の現場に具現化するかという課題は山積しておりますが，これからも研究を積み上げていきたいと思います． (終)

(愛知県立 一宮興道高等学校)

〈資料 1〉1993 年センター試験 数II [1] [2]

△OAB で，辺 OA を 3：2 に内分する点を C，辺 OB を 1：2 に内分する点を D とする．

(1) 線分 AD と BC の交点を P，直線 OP と辺 AB の交点を Q とすると，

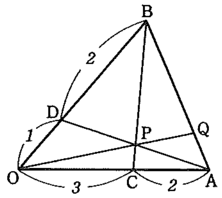
$\overrightarrow{OP}=\dfrac{\square}{\square}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\square}{\square}\overrightarrow{OB}$,

$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{\square}{\square}\overrightarrow{OP}$ である．

(2) 線分 AC 上に点 E，線分 BD 上に点 F をとり，線分 EF が点 P を通るようにする．

$\overrightarrow{OE}=\alpha\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OF}=\beta\overrightarrow{OD}$ とすると，α, β の間には

$\dfrac{1}{\square}\left(\dfrac{\square}{\alpha}+\dfrac{\square}{\beta}\right)=1$ の関係が成り立つ．



(1) メネラウスの定理から

$\dfrac{OB}{BD}\cdot\dfrac{DP}{PA}\cdot\dfrac{AC}{CO}=1$

ゆえに $\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{DP}{PA}\cdot\dfrac{2}{3}=1$

よって $\dfrac{DP}{PA}=1$

ゆえに

$\overrightarrow{OP}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}}{2}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OB}$

…… (答)

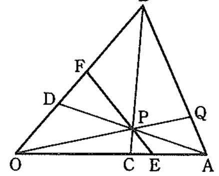
入砂の定理から $\dfrac{OB}{BD}\cdot\dfrac{DA}{AP}\cdot\dfrac{PQ}{QO}=1$

ゆえに $\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{PQ}{QO}=1$

よって $\dfrac{PQ}{QO}=\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{OP}{OQ}=\dfrac{2}{3}$

したがって $\overrightarrow{OQ}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OP}$ …… (答)

(2)



$\overrightarrow{OE}=\alpha\overrightarrow{OC}=\dfrac{3}{5}\alpha\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{OF}=\beta\overrightarrow{OD}=\dfrac{\beta}{3}\overrightarrow{OB}$

$\dfrac{OE}{OA}=\dfrac{3\alpha}{5}$, $\dfrac{OF}{OB}=\dfrac{\beta}{3}$

メネラウスの定理から

$\dfrac{OA}{AC}\cdot\dfrac{CP}{PB}\cdot\dfrac{BD}{DO}=1$

$$\frac{5}{2}\cdot\frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{2}{1}=1$$

ゆえに $\dfrac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PB}}=\dfrac{1}{5}$

メネラウスの定理から $\dfrac{\mathrm{OE}}{\mathrm{EC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FO}}=1$

ゆえに $\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{3-\beta}{\beta}=1$

$\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{3}{\beta}-1\right)=1-\dfrac{1}{\alpha}$ よって $\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{5}{\alpha}+\dfrac{3}{\beta}\right)=\dfrac{6}{5}$

ゆえに $\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{\alpha}+\dfrac{3}{\beta}\right)=1$ ……（答）

〈資料 2〉 入試問題

△OAB の内部に点Pがあり，

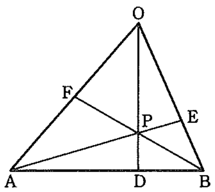
$$\overrightarrow{\mathrm{PO}}+\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{0}$$

を満たしている．

OP と AB，AP と BO，BP と OA の交点をそれぞれ D，E，F とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおくとき，

$$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OD}}+\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AE}}+\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{BF}}$$ の値を求めよ．

（解）



条件から

$$-\overrightarrow{\mathrm{OP}}+(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})+2(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})=\vec{0}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}\times\frac{3}{4}$$

ゆえに AD：DB＝2：1，OP：OD＝3：4

よって $\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OD}}=\dfrac{3}{4}$

入砂の定理から $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BD}}\cdot\dfrac{\mathrm{DO}}{\mathrm{OP}}\cdot\dfrac{\mathrm{PE}}{\mathrm{EA}}=1$

ゆえに $\dfrac{3}{1}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{\mathrm{PE}}{\mathrm{EA}}=1$

よって $\dfrac{\mathrm{PE}}{\mathrm{EA}}=\dfrac{1}{4}$ ゆえに $\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AE}}=\dfrac{3}{4}$

また，入砂の定理から $\dfrac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AD}}\cdot\dfrac{\mathrm{DO}}{\mathrm{OP}}\cdot\dfrac{\mathrm{PF}}{\mathrm{FB}}=1$

ゆえに $\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{\mathrm{PF}}{\mathrm{FB}}=1$

よって $\dfrac{\mathrm{PF}}{\mathrm{FB}}=\dfrac{1}{2}$ ゆえに $\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{BF}}=\dfrac{1}{2}$

よって $\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OD}}+\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AE}}+\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{BF}}=\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{8}{4}=2$

……（答）