第4回 日本数学コンクール 問題と解説

四方(しかた) 義啓(よしひろ)

数式らしい数式は見当たらないし，計算するにも公式すらない「日本数学コンクール」の問題を見て，「なんだこりゃあ，これのどこが数学だ」と思われる方があるかも知れません．むしろ，「計算が上手な，いわゆる数学がよくできる」方々にそれが多いのではないかと恐れているくらいです．

しかし，科学の歴史を振り返るとき，本物の好奇心に導かれた「式らしい式はないし，計算するにも公式すらない」数学が，その時代，その時代における科学・技術の発展を引っ張ってきたように見えるのです．まず最初に，そのような「考え方だけがあって数式のない」数学ができて，科学の発展を引っ張り，それを追っかけるようにして，数式や公式及び計算技術が，その時代，その時代の科学・技術の発達にあわせて作られてきたというのが本当の所なのではないでしょうか？　もしそうだとすると，科学・技術が目まぐるしく発展・変化していく現代においては，数学の中に来たるべき21世紀に通用する新しい考え方を築き上げること，更に，それによって新しい時代の科学を開いていくこと，この2点が我々に求められているような気がするのです．

それならば，「現状の，公式を記憶して，それを応用するだけの数学でいいのだろうか？」，「もしそれに問題点があるのなら，新しい数学の考え方を築き，それによって21世紀を作っていこうではないか」，これが私たちがこのコンクールを通して訴えたいことなのです．本誌を御愛読になる方々なら同意して頂けることと思います．きっと，未来が求める数学と単なる算術とは違うはずです．そうだとすれば，単なる受験技術とこのコンクールが少しくらい異なっているのはあたりまえだということにもなるでしょう．ですから，仮に，この問題文に対して，「なんだこりゃあ，これのどこが数学だ」，「長い，難しい，数学的という言葉の意味がわからない」などという不平が寄せられるとしても，それこそがこのコンクールの本質だと思うのです．

未来が期待している数学の大きい役割は，複雑に入り組んだ現実から，それを動かしている原理や法則をズバリと見抜いて欲しいということであるならば，「そんな未来の数学を実際に作って見せろ！」，「複雑に入り組んだ現実から，その本質をズバリ見抜いて見せろ！」と若い頭脳に挑戦するコンクールの問題は，複雑に入り組んだ上に曖昧な現実を提示してみせなければ意味がないのです….

こうした大変な意気込みで始めたコンクールも，4年目ともなると少々マンネリになってきたようです．このような問題に答える方も大変でしょうが，実は，問題を作る方も大変で，気を付けていないとすぐに安易な方向に流れてしまうのです．

例えば，「コンクールは流体に凝ってるゾ」という噂が流れたことさえもあります．液体・気体など流体の作る図形の面白さ・不思議さ，更に，その割には進んでいない理論的な取扱いなど，とにかく流体はコンクール向きで，つい何度も続けて取り扱ったのは確かです．しかし，これだけが21世紀に求められる数学の場であるはずはありません．

そこで，本年は認知科学や心理学の方向にもテーマを探り，「目の錯覚を説明できるような数学的な考え方を作れるか？」という趣旨の問題も作ってみました．問題4がそれであり，非ユークリッド幾何に結びつける解答を予想していましたが，いつものコンクール通り，動体視野について言及したものなど，まさかと思うような素晴らしい考え方を示す解答がいくつも見つかりました．残念ながら，その考え方を数式で表現することは，必ずしもうまくいかなかったようですが，それこそは大学で学んで頂ければいいのではないかと思っています．

とにかく，このような数学的な考え方が求められ，活躍できる場は，実は非常に広い範囲にわたるのではないのだろうか？　というのがこの問題の狙いであり，コンクール全体を通じて私たちが問いかけたかったことなのです．

この意味で，第２回コンクールに引き続き，第５問で「和算はなぜ消えた」をもう一度聞いてみました．要するに，数学の歴史と科学・技術の歴史の重なりを見つめ直してほしかったのです．数学が科学・技術の裏付けを見失った「趣味的な，狭いもの」であってはならないことを認識しておくことは，未来の数学を作って，21世紀を開いていくにあたって，どうしても必要なことと考えたからです．

残る３題は「いろいろな意味にとれる」，「問題の意味が曖昧である」，「難しすぎる」，「問題文が長すぎる」などと言われ続ける通り，その形だけから見れば，コンクール名物，正に「マンネリ」傾向の問題に違いありません．先にも述べた通り，コンクールの狙いはそこから何をくみ取り，未来に向かってどんな数学を組み立てればよいかを考えようという点にあるのですから，出題する側はこれでよいとしても，採点する側はそうもいかなかったようです．参加してくれた方々が難問・奇問に悩んだように，採点委員会はいろいろな答案に悩み続けました．採点委員会にとっても，それは真剣勝負だったのです．

一番ひどかったのが第３問，デートの問題でした．これはまともに設定すると大変な問題で，確率論の専門家でさえも現在てこずっているものです．それを知りながら，あえてこれを出題したのは，このようなトンでもなく難しく，しかも面白い問題が，高校数学が得意とする碁盤の目の上の確率の問題に持ち込めることを確認してもらうことも無駄ではないと思ったからなのです．

ただ，この文章のままでは碁盤の目と目の途中で出会えると考えるかどうかを確定することができず，それで混乱が起こってしまいました．碁盤の目の途中では出会えないものとするという設定をすると，永久に出会えない組合せが半分はできてしまい，そのために両方が動くときはなかなか出会えないという答になったはずです．ですが，文章の解釈によっては設定，ひいては解答がひっくり返り，どちらが正しいかは実験に待たねばならないというシチュエーションも，またコンクールらしくていいではないかということで止めたのです．それでも，なかなかの答がかなりの数で現れたのは嬉しい驚きでした．

これほどではなかったにせよ，第１問でもかなりの混乱がありました．これはせっかく挿絵をつけたのが仇になって，トランプの絵柄が見えるのか見えないのかで問題の性質が全く違ってしまうのです．挿絵の原稿にはトランプの絵柄が入っていたのですが「マア，いいよ，いらないよ」と言ってしまった私の不注意でこんなことになってしまいました．全く申し訳ないと思っています．

文章こそいい加減ですが，この問題だけはきちんとしたかなり高度な正解があります．類似のものが「十六むさし」パズルの解説として，高木貞治先生の本にでているのです．これについても，まさかこの本を知っていた訳ではないだろうなと疑いたくなるほどの見事な解答もありました．

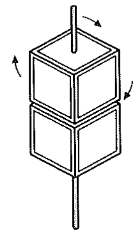
最後に第２問ですが，ここでも第４問と同じ考え方が読み取って頂けることと思います．これは数学的分類からは微分法よりもう１つ上の変分法の問題ということになるのですが，うっかりすると都市計画法か，生物形態学の問題であると分類されてしまっても全く不思議はないはずです．とすれば，このような問題を正面から捉えられる数学が作れたとき，数学は，今はタブーとされている「生命科学」や「システム設計科学」に大きく踏み込めることになるのだと考えられないでしょうか？

この問題は「枝別れの数学」，「フラクタルの数学」を作るにはどうすればいいか，また，それは現代科学の中でどのような方向にあるのかという「超高度」なものを求めているのですが，フラクタルの考えのところまではなんとかたどり着いている答案が結構あり，正直言って驚きました．

もし，このような数学が私たちの見通し通りの未来を開いていくとしたら，今年もあいかわらず，「なんだこりゃあ，これのどこが数学だ」と言われそうな問題に６時間たっぷりかけて真剣に取り組み，あるいは楽しんでくれた参加者の１人１人に，答はどうであれ，本当に心強いものを感じています．

もちろん，これらのプロ級の問題が１つでも完全に解けたとすれば，それはそれで凄いことに違いはありません．しかし，このコンクールで評価されるべきものが結果だけであるはずは決してないと思っています．この「答のない」コンクールは，それこそ参加して，いわば未来に挑戦することの中にこそ意義を見いだして頂きたいと思っているのです．そして，それを理解してくださる方々によって，明日が支えられていくような気がしているのです．

問題 1　昔々あるところに，２つの立方体の箱を串に通した小道具を使って，トランプ手品をして見せる大道芸人がおりました．これは断面が正方形の鉛筆の芯を引き抜いて，木の部分をさいころ状に切ってから，もう１度芯を通し直したものと考えていただければいいでしょう．ですから箱は串の周りにクルクル回転するのです．この小道具は串を垂直方向に持って使いますが，串の通っていない各面の左右の端には正方形のトランプが上下方向からうまく差し込めるように桟がついていて，２つの箱の向きを揃えると上の面から下の面，またその逆というようにトランプが空いている面へ滑りこめる仕掛けになっておりました．



「ここに取り出しましたるハート，ダイヤ，クローバーなる各２枚のカード，それにジョーカーを加えての計７枚をでたらめに桟に差し込みます．すると，空いた面が１つできる．上の箱を回してみても，下の箱を回しても，もはや，カードの順はどうなっておるかわからぬ．そこで，お立会い，これをちょいと回して，空いた面に，カードを滑りこませる，途中カードを抜いたりはしない…，こうして，ジョーカーを上に残し，あとは上と下を揃えてクローバー縦２枚，ダイヤ縦２枚，ハート縦２枚と並べ替えられれば，拍手御喝采!!」こうしてこの芸人は幸せに暮らしていきましたとさ．

でもこの話には続きがあります．「そこの小僧，この芸をまねてもいいが，決して赤ばかり，黒ばかり，または赤黒同数のカードでやるんじゃない，そうすると五角柱，三角柱の箱が必要になって，それには不幸が宿るから…な」とこの芸人は言い残していったのだそうです．

さて，種や仕掛けなしにこの手品がやれるのでしょうか？　それから，芸人の言い残したことは本当なのでしょうか？　数学的に解き明かしてください．

解説　答は，「何枚のカードでも可能である．しかも，勝手に指定された順序に並べることができる」です．これを採点してくださった三宅先生，福谷先生方のコメントにしたがって述べましょう．

トランプの場合を一般化して，２枚ずつ同じ色を塗った n 組，$2n$ 枚のカードにもう１枚の別の色を塗ったカード J を加えた $2n+1$ 枚のカード ($n \geqq 2$) について考える．これらのカードを２段に重ねた $n+1$ 角柱の各面に１枚ずつはめ込む．このとき，カード J は上段に，空っぽの場所 E は下段にあるとしてよい．更に上段，下段を回して，カード J と空き場所 E とが同じ (縦) 列にあるようにする．この列を一番端にして書けば，$(1, 2, \cdots, n)$ の順列 $(a, b, c, \cdots)$，$(\alpha, \beta, \gamma, \cdots)$ によって上下のカードの配列は

$$\boxed{\begin{matrix} a, & b, & c, & \cdots, & \mathrm{J} \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \cdots, & \mathrm{E} \end{matrix}} \quad \text{配列(1)}$$

と書ける．

これに対し次の基本操作が行えることは明らか．

基本操作　下 (上) 段の E は上 (下) 段のどのカードとも入れ換え可能

この操作によって次の補題が得られる．

補題 1　最初の２列と最後の列だけを用いて配列(1)を次の配列にできる：

$$\boxed{\begin{matrix} \alpha, & \beta, & c, & \cdots, & \mathrm{J} \\ b, & a, & \gamma, & \cdots, & \mathrm{E} \end{matrix}} \quad \text{配列(2)}$$

補題 2　最初の２列と最後の列だけを用いて配列(1)を次の配列にできる：

$$\boxed{\begin{matrix} \alpha, & b, & c, & \cdots, & \mathrm{J} \\ \beta, & a, & \gamma, & \cdots, & \mathrm{E} \end{matrix}} \quad \text{配列(3)}$$

この補題によって次の定理が得られる：

定理 A　どの２つの (縦) 列も入れ替えることができる．

定理 B　上段の並び方とカード J の位置はそのままにして，下段の勝手な２枚のカードを入れ替えることができる．

$n=2$ ならここで証明は終了している．$n \geqq 3$ の場合は数学的帰納法を使えばよい．

問題 2　君は偉大な建築設計者兼数学者で，団地のアパートの配置と道路網の設計を任されていると仮定してみてください．ただし，団地への出入口は１つ，そして，道路には一般道路と幹線道路，高速道路の３種類があって，幹線道路は建設費が一般道路の10倍必要な代わりに，許容通行量が100倍，更に高速道路となると，建設費が幹線道路の10倍になる代わりに許容通行量が100倍になるものとしておきましょう．また，道路やアパートの入口はすべて平面上にあって，立体交差は許さないことにします．

模範的な答は，多分，与えられた土地の形と団地人口に対して，道路建設費用を最小にするビルの配置と道路網の形を求めることになるでしょうが，そのほかにも適当な仮定を設けて，建設に必要な時間数を最小にすることを考えるとか，土地面積を最も有効に利用することを考えるなど，設計者としては充分に腕がふるえる場があるはずです．

君の会心のデザインは，どんな形の街になりましたか？　どういう考えと計算の下にこのデザインになったのか「数学的」な説明がつけられますか？　更に，一服したところで，用意したクマザサ，イチョウ，トウカエデ，アジサイなどの葉っぱの写真を眺めてみてください．葉脈が養分や水分が通過する道路網に見えてきませんか？　もしそうなら，これらがどういう意図で設計されているのか考えてみてくれませんか？

問題 3 ボロ博士も人の子，女性とデートをすることもあります．ところがこの間は待ち合わせの場所が混雑していた上，暗くなりかけていたので彼女が博士を見つけてくれるまでに1時間もかかってしまって大喧嘩になりました．実は，かなりの近視の上に乱視のボロ博士としては，うろうろ探しまわるより，じっとしている方がいいと思って，「この辺で待ってて」と指定された範囲の中の一定の場所を動かずにいたのですが，彼女にはそれが気に食わなかったのです．彼女はお互いが相手を探して動き回るほうが早く相手を見つけることができるはずだと主張します．もし両方とも動かなければいつまでたっても相手を見つけられないだろうというのがその根拠です．

もちろんボロ博士は，山で遭難したら一歩も動かずに助けを待てと言う通り「数学的」には自分は絶対正しいのだと思ってはいるのですが，彼女の剣幕には少々自信がぐらついてきました．君ならどちらの味方をしますか，またそれは何故ですか，その理由を「数学的」に説明できますか．

解説 この問題では，現実にも起こり得るデートの混乱をどうして数学に持ち込むかという問題設定の方法自身を聞きたかったので，ワザと詳しい問題設定を書かなかったのですが，碁盤の目と目の途中で出会えると考えるかどうかを除けば，たいていの答案ではうまく碁盤の目の上の確率問題に持ち込んであったようです．

まともな設定をすると，これは専門家には hitting time の問題としても知られる大変な問題で，この定義がきちんとできるだけでも大したものだと言われているくらいです．この尻尾を延長すれば，デート戦略の問題はおろか，2種類の気体の反応などの問題，気体反応論の最先端へも行きついてしまうのです．

最初は，途中では出会えないものとするという条件をつけておいて多少考え易くする予定でした．こうすれば，博士も女性も共に一定時間で縦または横に一目ずつ動くとすれば，どうしても出会えない組合せが半分はあることになって，例えば，このような陰の部分と，そうでない陽の当たる部分とをペアにして考えることで，2人共が動く場合と，女性だけが動く場合との比較が容易になると思ったのです．でも，コンクールの目的は答それ自身ではなくて与えられた現実からどのように数学を作り，どうやってそれに現実を載せるかにあったはずです．そして，本当にいい答は，それが現実をどれくらい見事に切り取っているかによって計られるべきでしょう．というわけで，涙をのんで，この設定を消去したのです．もっとも，この設定を消去した後でも，それが頭の中にこびりついていたため，そして，解答を見せてもらうまでは参加した方々も多分同じように設定してくれるだろうと思っていたので，答は確定したもののように発表し，報道されてしまいましたが，正解はいつものコンクールのように両方あるのです．

採点してくださった梅村先生方のコメントは次のようでした；

「この問題ではモデルを設定して，単純な原理に推論を帰着させることが大切である．まず第1のポイントはこの文学的な表現をどう理想化，モデル化するかであり，第2のポイントは，そのモデルの中で2人が行動する場合の出会い易さとでも言うべきものをどう計るかであろう」，「モデルとしては，2人共が勝手に動くとして，一方を固定して考えるとき，1人だけが動くときの2倍の速度になるという仮説を設ける場合と，相対的な移動領域の広さを考えて，単位時間に相手を発見する可能性が2人が動いても1人が動いても同じとする仮説を設ける場合とがあり得る．前者の場合は2人が動く方が，後者では1人だけの方が有利である」

問題 4 最近，立体視図形（3D グラフィックス）が大流行です．大きく広がった立体世界は，ちょうど写真機の場合と同じように，まず，目のレンズによって網膜というごく小さい平面の世界に投影され，左右の目から送られてくるこの2枚の平面図形をもとにして「脳みそコンピュータ」が立体の世界に組立て直しているのです．ですから，平面図形であっても，それを左右の目のレンズを通してうまく「脳みそコンピュータ」に送り，立体図形に組み立てさせてやれば立体視ができるという，一種の眼の錯覚が3Dの（数学的）秘密なのです．

ところが，同じ眼の錯覚といっても，平行線が平行に見えないツェルナーの錯視図形とか，直線がズレて見えるポッゲンドルフの錯視図形，横よりも縦の方が長く見えるヘルムホルツの錯視図形など，現在でもうまく説明がつかないいろいろな錯視図形があって研究者を悩ませています．大胆な我がボロ博士は，写真機だって歪んで写るのだから，目の網膜の像も歪んでいるだろう．それなら，それを処理して正しく見せる「脳みそコンピュータ」は「逆方向に」歪んでいるはずだ，それが錯視の原因なのでアールと言い出して，うんと先すぼまりに写った横断歩道の写真や，今にも倒れそうに写ったビルの写真，そして蚊くらいにしか写っていない飛行機の写真を撮ってきました．ボロ博士が使ったのは主に 75° の広い範囲を写せる28ミリレンズで，ビルの歪みはそのせいです．歪まないのは飛行機を撮ったもっと狭い範囲を写すレンズですが，眼のレンズは横方向には約 160° 縦方向には約 120° の範囲を見ていると言われています．

さて，ボロ博士は錯視をどう説明したいのでしょう．そして，いったいボロ博士は正しいのでしょうか？ 1つ考えてみてください．

解説　この問題では，ヒトにおける画像認識，言い換えればヒトはどのようにものを見るかというプロセスを2つの過程に分解してみました．ヒトがものを見て理解するのは，まず目というセンサーで情報を受けとり，それを「脳みそコンピュータ」に送って処理しているからなのだと考えてみたのです．このとき，参考資料に示したように目で受け取った情報はどうしても歪みを含んでいます．もちろん，厳密に言えば，ここに示したものは写真機のそれであって，本物の目の歪みではないのですが，たいていの場合，本物の目のレンズも写真機のレンズと同じように考えてよいことになっているのです．

ヒトは，この情報を受けてすぐさま反応しなければいけないわけですが，これが歪んでいるとどんなことになるかは，度の強い眼鏡を初めてかけた人にはよくわかるでしょう．そうするとこの歪みをアッという間に補い，間違いなく反応するために「脳みそコンピュータ」自身にもある種の歪みが内蔵させてあるだろうという考え方がでるのは自然です．ここを無理をして「数学的に」言えば，現実Xは目のレンズによって，歪みのついた情報$f(X)$に変換されて「脳みそコンピュータ」に送られるわけです．ところが，ヒトにとって本当に必要なのは，現実Xなのですから，「脳みそコンピュータ」は歪みを補正して情報$f(X)$を現実Xにひきもどす作用をしているはずです．すなわち，情報$f(X)$に逆変換f^{-1}を施すのが「脳みそコンピュータ」の役目なのです．

$$f^{-1}(f(X))=X$$

というわけですね．そこでレンズの歪みを数学的に表せれば，写像fの性質がわかり，それから逆写像f^{-1}の性質も簡単に計算できるだろうと考えられます．ところが，ヒトの意識の中心は動き回っている上，ヒトは「見たいようにものを見る」性質まで持っていますから，なかなか簡単ではないのです．おまけに「脳みそコンピュータ」はこの演算をアッという間にやらなければならないのです．

採点に関係された北岡，丹羽先生の意見も交えて述べると；

「したがって，『脳みそコンピュータ』はできるだけ簡単な手がかりをつかもうとする．例えば，現実に平行なのかどうかは，それに交わる直線族によって見分けようとするはずである．そこへわざと変に交わっている直線族を与えたら，『脳みそコンピュータ』は必ず間違えてしまうであろう．よって，目の錯覚はむしろ「数学的に」必然だということになるはずである」

これ以上詳しく述べる余裕はないのですが，レンズによって歪んだ空間やその中で平行なものを考えられる幾何学が非ユークリッド幾何学なのです．

問題 5　ある教科書には載っているということですが，円の面積と円周の関係式を実に気の利いた方法，いわば和算的な方法で作ることができます．

まず，中心から放射状に引いた直線で円を菊の花びら型に切ります．これを互い違いに組み合わせるとほぼ長方形をした図形ができ，その1辺の長さは半径rで，もう1つは大体円周の半分になります．そうすると円の面積はこの長方形の面積に等しく，それは円周の半分の半径倍です．というわけで

$$\text{円の面積}=\text{長方形の面積}=(\text{円周の半分})\times(\text{半径})=\pi r^2$$

ここまではいいとして，問題はこの方法を球の表面積と半径rとの関係式に当てはめるとどうなるかです．球の表面のうちの上半分をミカンの袋のように切り分けて互い違いに組み合わせると雨樋(あまどい)のような形ができて，そのまっすぐな方の辺の長さはもとの球の赤道の半分，また円弧の方はもとの球の赤道の4分の1になるでしょう．とすると

$$\text{球の表面積}=2\times(\text{雨樋の面積})=2\times(\text{球の赤道の半分})\times(\text{球の赤道の4分の1})$$

となってもいいはずなのですが，どこか変なのです．実は上の式を計算してみるとπ^2r^2となりますが，ほんとの表面積は$4\pi r^2$ですね．

さあ，どこが変なのでしょう，$0.86\pi r^2$ほどの面積はどこへ消えたのでしょう．ついでに，いわゆる「ほんとに気の利いた」解法を残しながら今の教科書から和算が消えた理由は何だったのでしょう．ぜひ考えてみてください．

(名古屋大学)

☆ 誌面の都合上，問題2，4，5の図 および 問題2，5の解説は省きました．(編集部)