入試問題の次数を一般化した命題

加賀(かが) 義貴(よしき)

問題が与えられたとき，その奥に，より根本的な原理がありはしないかと考える．命題が，より一般的な条件の下で成立することを示すことによって，根源的な真実に近づくことができる．

命題 1. n を 0 以上の整数とする．
$$\frac{a^n}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^n}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^n}{(c-a)(c-b)}$$
$=P_n$ とおくとき

$n<2$ のとき $P_n=0$

$n\geqq 2$ のとき $P_n=\sum_{l+m+k=n-2} a^l b^m c^k$

$(l,\ m,\ k\geqq 0)$

(つまり $n-2$ 次のすべての同次項を並べて加えたもの)

例. 結論を示すと $P_2=1$，$P_3=a+b+c$，
$P_4=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$，
$P_5=a^3+b^3+c^3+a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2+abc$

証明. $(a-b)(b-c)(c-a)P_n$

$=a^n(c-b)+b^n(a-c)+c^n(b-a)$

($n=0$，1 なら $P_n=0$．以下 $n\geqq 2$ として示す)

$$=a^n(c-b)-a(c^n-b^n)+cb(c^{n-1}-b^{n-1})$$
$$=(c-b)\left\{a^n-a\sum_{j=1}^{n}c^{n-j}b^{j-1}+cb\sum_{j=1}^{n-1}c^{n-1-j}b^{j-1}\right\}$$
$$=(c-b)\left\{a^n-a\sum_{j=1}^{n}c^{n-j}b^{j-1}+c\sum_{j=2}^{n}c^{n-j}b^{j-1}\right\}$$
$$=(c-b)\left\{\sum_{j=2}^{n}c^{n-j}b^{j-1}(c-a)+a^n-ac^{n-1}\right\}$$
$$=(c-b)\left\{\sum_{j=2}^{n}c^{n-j}b^{j-1}(c-a)-a(c^{n-1}-a^{n-1})\right\}$$
$$=(c-b)(c-a)\left\{\sum_{j=2}^{n}c^{n-j}b^{j-1}-a\sum_{j=1}^{n-1}c^{n-1-j}a^{j-1}\right\}$$
$$=(c-b)(c-a)\left\{\sum_{j=2}^{n}c^{n-j}b^{j-1}-a\sum_{j=2}^{n}c^{n-j}a^{j-2}\right\}$$
$$=(c-b)(c-a)\left\{\sum_{j=2}^{n}c^{n-j}(b^{j-1}-a^{j-1})\right\}$$
$$=(c-b)(c-a)(b-a)\left\{\sum_{j=2}^{n}c^{n-j}\left(\sum_{k=1}^{j-1}b^{j-1-k}a^{k-1}\right)\right\}$$

よって $P_n=\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=1}^{j-1}a^{k-1}b^{j-1-k}c^{n-j}$ ここで k，j は $1\leqq k<j\leqq n$ を満たす整数全体をわたる．すなわち $k-1\geqq 0$，$j-k-1\geqq 0$，$n-j\geqq 0$ を満たす整数全体をわたる．

$s=k-1$，$t=j-k-1$，$u=n-j$ とおくと $(k-1)+(j-k-1)+(n-j)=n-2$ から，$s+t+u=n-2$，s，t，$u\geqq 0$ である．逆にこのとき，上の条件を満たす k，j が存在するから，

$P_n=\sum_{\substack{s+t+u=n-2\\ s,t,u\geqq 0}}a^s b^t c^u$ を得る． (証明終)

さて，文字を 1 つ増やしてみよう．

命題 2. n を 0 以上の整数とする．
$$\frac{a^n}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^n}{(b-a)(b-c)(b-d)}+\frac{c^n}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{d^n}{(d-a)(d-b)(d-c)}=P_n$$
とおくとき

$n\leqq 2$ のとき $P_n=0$

$n\geqq 3$ のとき $P_n=\sum_{p+q+r+s=n-3}a^p b^q c^r d^s$

証明. 式 P_n において，a を x におきかえた x の関数を $f(x)$ とする．ただし b，c，d は定数とみなす．$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+f_4(x)$ である．ただし，
$$f_1(x)=\frac{x^n}{(x-b)(x-c)(x-d)}$$
$$f_2(x)=\frac{b^n}{(b-x)(b-c)(b-d)}$$
$$f_3(x)=\frac{c^n}{(c-x)(c-b)(c-d)}$$
$$f_4(x)=\frac{d^n}{(d-x)(d-b)(d-c)}$$
$f(x)$ は，$|x|>\max(|b|,\ |c|,\ |d|)$ において正則で

あるからローラン展開できて，$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k x^k$

ここで，

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(x)}{x^{k+1}}dx$$

ここに積分は原点を中心とし，内部に b，c，d を含む任意の円 C 上を正の方向に１周する．k を固定してこの積分を求める．$c_k=I_1+I_2+I_3+I_4$ とする．

$$I_1=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f_1(x)}{x^{k+1}}dx \qquad I_2=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f_2(x)}{x^{k+1}}dx$$

$$I_3=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f_3(x)}{x^{k+1}}dx \qquad I_4=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f_4(x)}{x^{k+1}}dx$$

とする．

$$I_1=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{x^{n-k-1}}{(x-b)(x-c)(x-d)}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{x^{n-k-4}}{\left(1-\frac{b}{x}\right)\left(1-\frac{c}{x}\right)\left(1-\frac{d}{x}\right)}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c x^{n-k-4}\sum_{s,t,u=0}^{\infty}\left(\frac{b}{x}\right)^s\left(\frac{c}{x}\right)^t\left(\frac{d}{x}\right)^u dx$$

ここで，C 上 Σ は一様収束だから

$$I_1=\sum_{s,t,u=0}^{\infty} b^s c^t d^u \frac{1}{2\pi i}\int_c x^{n-k-4-s-t-u}dx$$

ここで場合分けをしてこの積分を求める．

(i) $n-k-4<-1$ (すなわち $n-k<3$) の場合

各項の積分は全て０．よって $I_1=0$

(ii) $n-k-4\geqq -1$ (すなわち $n-k\geqq 3$) の場合

$n-k-4-s-t-u=-1$ の項を除いてこの積分は０であるから，$s+t+u=n-k-3$ となるときだけの和を求める．つまり，

$$I_1=\sum_{s+t+u=n-k-3} b^s c^t d^u$$

次に I_2 を求めるが，I_3，I_4 についても同様である．

$$I_2=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{b^n}{x^{k+1}(b-x)(b-c)(b-d)}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{-b^n}{x^{k+2}\left(1-\frac{b}{x}\right)(b-c)(b-d)}dx$$

$$=\frac{-b^n}{(b-c)(b-d)}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_c x^{-k-2}\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{b}{x}\right)^s dx$$

$$=\frac{-b^n}{(b-c)(b-d)}\sum_{s=0}^{\infty} b^s \frac{1}{2\pi i}\int_c x^{-k-2-s}dx$$

ここで，k の値によって場合分けをする．

(iii) $-k-2<-1$ (すなわち $k>-1$) の場合

$I_2=0$．同様にして $I_3=I_4=0$ が示される．

(iv) $-k-2\geqq -1$ (すなわち $k\leqq -1$) の場合

$-k-2-s=-1$ の項を除いてこの積分は０であるから，$s=-k-1$ の項だけ残る．つまり

$$I_2=\frac{-b^n}{(b-c)(b-d)}\cdot b^{-k-1}=\frac{-b^{n-k-1}}{(b-c)(b-d)}$$

このとき，

$$I_2+I_3+I_4=\frac{-b^{n-k-1}}{(b-c)(b-d)}+\frac{-c^{n-k-1}}{(c-b)(c-d)}+\frac{-d^{n-k-1}}{(d-b)(d-c)}$$

よって**命題１**から(iv)の場合において更に

(v) $n-k<3$ の場合，$I_2+I_3+I_4=0$

(vi) $n-k\geqq 3$ の場合，

$$I_2+I_3+I_4=-\sum_{s+t+u=n-k-3} b^s c^t d^u$$

以上から

$n\leqq 2$ の場合．

$k\leqq n-3$ の場合　(ii)と(vi)から

$$I_1+(I_2+I_3+I_4)=0$$

$k>n-3$ かつ $k\leqq -1$ の場合　(i)と(v)から

$$I_1=0,\quad I_2+I_3+I_4=0$$

$k>n-3$ かつ $k>-1$ の場合　(i)と(iii)から

$$I_1=I_2=I_3=I_4=0$$

ゆえに，全ての k についてローラン展開の係数 $c_k=0$．つまり $f(x)\equiv 0$．$P_n=f(a)=0$

$n\geqq 3$ の場合．

$k\leqq -1$ の場合 $n-k\geqq 4$ から　(ii)と(vi)から

$$I_1+(I_2+I_3+I_4)=0$$

$k>-1$ かつ $k\leqq n-3$ の場合　(ii)と(iii)から

$$I_1+I_2+I_3+I_4=\sum_{s+t+u=n-k-3} b^s c^t d^u$$

$k>-1$ かつ $k>n-3$ の場合　(i)と(iii)から

$$I_1=I_2=I_3=I_4=0$$

ゆえに，係数は，$0\leqq k\leqq n-3$ のときに限り

$$c_k=\sum_{s+t+u=n-k-3} b^s c^t d^u,\ \text{他の係数は}\ c_k=0$$

ゆえに $f(x)=\sum_{k=0}^{n-3}\sum_{s+t+u=n-k-3} b^s c^t d^u x^k$

$$=\sum_{k+s+t+u=n-3} b^s c^t d^u x^k$$

よって　$P_n=f(a)=\sum_{k+s+t+u=n-3} a^k b^s c^t d^u$

($n-3$ 次同次式)

(命題２．証明終)

更に文字の個数を一般にすると

命題 3.　n は０以上，また m は２以上の整数とすると

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i^{\,n}}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}(a_i-a_j)}=\begin{cases}0\ (n\leqq m-2\ \text{のとき})\\ \displaystyle\sum_{r_1+\cdots+r_m=n-m+1}\prod_{j=1}^{m}a_j^{\,r_j}\\ \qquad (n\geqq m-1\ \text{のとき})\end{cases}$$

証明の概略． m が2のとき明らかに成立する．m についての数学的帰納法による．$m\geqq3$ とする．左辺の a_1 を x におきかえた式を $f(x)$ とする．

$$f(x)=\frac{x^n}{\prod_{j=2}^{m}(x-a_j)}+\sum_{i=2}^{m}\frac{a_i^{\,n}}{(a_i-x)\prod_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{m}(a_i-a_j)}$$

以下の積分は原点を中心とし，内部に a_2, …, a_m を含む任意の円 C 上を正の方向に1周する．k は整数．

$$I_1=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{x^{n-k-1}}{\prod_{j=2}^{m}(x-a_j)}dx$$

$$I_2=\sum_{i=2}^{m}\frac{a_i^{\,n}}{\prod_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{m}(a_i-a_j)}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{x^{-k-1}}{a_i-x}dx\ \text{とおく．}$$

$$I_1=\begin{cases}0\ (n-k<m-1\ \text{のとき})\\ \displaystyle\sum_{r_2+\cdots+r_m=n-k-m+1}\prod_{j=2}^{m}a_j^{\,r_j}\ (n-k\geqq m-1\ \text{のとき})\end{cases}$$

$$I_2=\begin{cases}0\ (k>-1\ \text{のとき})\\ \displaystyle\sum_{i=2}^{m}\frac{-a_i^{\,n-k-1}}{\prod_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{m}(a_i-a_j)}\ (k\leqq-1\ \text{のとき})\end{cases}$$

ここで m についての数学的帰納法を用いると

$$I_2=\begin{cases}0\ (k>-1\ \text{のとき})\\ 0\ (k\leqq-1\ \text{かつ}\ n-k<m-1\ \text{のとき})\\ \displaystyle-\sum_{r_2+\cdots+r_m=n-k-m+1}\prod_{j=2}^{m}a_j^{\,r_j}\\ \left(\begin{array}{l}k\leqq-1\ \text{かつ}\\ n-k\geqq m-1\ \text{のとき}\end{array}\right)\end{cases}$$

$n\leqq m-2$ のとき．

$k\leqq n-m+1$ のとき　$I_1+I_2=0$

$k>n-m+1$ かつ $k\leqq-1$ のとき　$I_1+I_2=0$

$k>n-m+1$ かつ $k>-1$ のとき　$I_1+I_2=0$

$n\geqq m-1$ のとき．

$k\leqq-1$ のとき　$I_1+I_2=0$

$k>-1$ かつ $k\leqq n-m+1$ のとき

$$I_1+I_2=\sum_{r_2+\cdots+r_m=n-k-m+1}\prod_{j=2}^{m}a_j^{\,r_j}$$

$k>-1$ かつ $k>n-m+1$ のとき　$I_1+I_2=0$

$f(x)$ をローラン展開すると

$n\leqq m-2$ のとき　$f(x)=0$

$n\geqq m-1$ のとき

$$f(x)=\sum_{r_1=0}^{n-m+1}x^{r_1}\sum_{r_2+\cdots+r_m=n-r_1-m+1}\prod_{j=2}^{m}a_j^{\,r_j}$$

よって　与式 $=f(a_1)=\displaystyle\sum_{r_1+\cdots+r_m=n-m+1}\prod_{j=1}^{m}a_j^{\,r_j}$ (証明概略終)

次にもう1つ入試問題の次数の一般化の例を示す．横浜市立大学の入試で次の問題が出題された．

「$x^7=1$ のとき

$$\frac{x}{x^2+1}+\frac{x^2}{x^4+1}+\frac{x^3}{x^6+1}\quad\text{を簡単にせよ．」}$$

$x\neq1$ のとき答は -2 になるが，この式は次のように一般化される．

命題 4． n が3以上の奇数のとき，x を1の原始 n 乗根(n 乗して初めて1になる数)とすると

$$\frac{x}{x^2+1}+\frac{x^2}{x^4+1}+\cdots\cdots+\frac{x^{\frac{n-1}{2}}}{x^{n-1}+1}=k\ \text{とおくと}$$

$$k=\begin{cases}\dfrac{n-1}{4}\ (n\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 4)\ \text{のとき})\\ \dfrac{n+1}{-4}\ (n\equiv3\ (\mathrm{mod}\ 4)\ \text{のとき})\end{cases}$$

次の補題を示す．

補題 1． n は2以上の整数，x は1の原始 n 乗根，$1\leqq m\leqq n-1$ とするとき，

$$\sum_{j=0}^{n-1}x^{mj}=\frac{x^{mn}-1}{x^m-1}=0$$

証明． $x^m\neq1$, $x^{mn}=(x^n)^m=1$ となるから (証明終)

命題4の証明．

$$k=\frac{1}{x+\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{x^{\frac{n-1}{2}}+\frac{1}{x^{\frac{n-1}{2}}}}$$

$$=\frac{1}{x+x^{n-1}}+\frac{1}{x^2+x^{n-2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{x^{\frac{n-1}{2}}+x^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{x+x^{n-1}}+\frac{1}{x^2+x^{n-2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{x^{\frac{n-1}{2}}+x^{\frac{n+1}{2}}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{x^{\frac{n+1}{2}}+x^{\frac{n-1}{2}}}+\cdots\cdots+\frac{1}{x^{n-2}+x^2}+\frac{1}{x^{n-1}+x}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{x+\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}}\right\}$$

ここで　j が整数のとき

$$\frac{1}{x^j+x^{-j}}=x^j\cdot\frac{1}{1+x^{2j}}=x^j\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1-(-1)}{1-(-x^{2j})}$$

$$=\frac{x^j}{2}\cdot\frac{1-(-x^{2j})^n}{1-(-x^{2j})}$$

($\because$ n は奇数から，$(-x^{2j})^n=-x^{2jn}$
$=-(x^n)^{2j}=-1$)

$$=\frac{x^j}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-x^{2j})^k \quad \cdots\cdots ①$$

nが4を法として1のときと3のときに分ける．

nを4で割って1余るとき

$$\frac{1}{x^j+x^{-j}} \qquad (\because ①から)$$

$$=\frac{x^j}{2}\{1-x^{2j}+\cdots+(-x^{2j})^{\frac{n-1}{2}}+\cdots+(-x^{2j})^{n-1}\}$$

$$=\frac{x^j}{2}\{1-x^{2j}+\cdots+x^{(n-1)j}-\cdots+x^{(2n-2)j}\}$$

$$=\frac{1}{2}\{x^j-x^{3j}+\cdots-x^{(n-2)j}+x^{nj}-\cdots+x^{(2n-1)j}\}$$

$$=\frac{1}{2}\{x^j-x^{3j}+\cdots-x^{(n-2)j}+1-\cdots+x^{(n-1)j}\}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{x^j+x^{-j}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}(x^j-x^{3j}+\cdots-x^{(n-2)j}+1-\cdots+x^{(n-1)j})$$

補題1から

$$=\frac{1}{2}(0-0+\cdots-0+n-\cdots+0)=\frac{n}{2}$$

ゆえに

$$k=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{x^j+x^{-j}}=\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{x^0+x^0}\right)=\frac{n-1}{4}$$

nを4で割って3余るとき

$$\frac{1}{x^j+x^{-j}} \qquad (\because ①から)$$

$$=\frac{x^j}{2}\{1-x^{2j}+\cdots+(-x^{2j})^{\frac{n-1}{2}}+\cdots+(-x^{2j})^{n-1}\}$$

$$=\frac{1}{2}\{x^j-x^{3j}+\cdots-x^{nj}+\cdots+x^{(2n-1)j}\}$$

ここで $x^{nj}=1$

$$=\frac{1}{2}\{x^j-x^{3j}+\cdots-1+\cdots+x^{(n-1)j}\}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{x^j+x^{-j}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}(x^j-x^{3j}+\cdots-1+\cdots+x^{(n-1)j})$$

$$=\frac{1}{2}(0-0+\cdots-n+\cdots+0)=-\frac{n}{2}$$

ゆえに

$$k=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{x^j+x^{-j}}=\frac{1}{2}\left(-\frac{n}{2}-\frac{1}{x^0+x^{-0}}\right)=\frac{n+1}{-4}$$

(証明終)

なお，命題4の等式は三角関数についての等式に書きかえることができる．命題4で $x=e^{\frac{2\pi i}{n}}$ とすると

$$\frac{1}{x^m+x^{-m}}=\frac{1}{e^{\frac{2\pi m}{n}i}+e^{-\frac{2\pi m}{n}i}}=\left(2\cos\frac{2\pi m}{n}\right)^{-1}$$

よって，次の等式が得られる．

命題 5.

$$\sum_{m=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{1}{\cos\frac{2\pi m}{n}}=\begin{cases}\dfrac{n-1}{2}\left(\begin{array}{l}n\equiv 1 \pmod 4\\ のとき\end{array}\right)\\[2ex] \dfrac{n+1}{-2}\left(\begin{array}{l}n\equiv 3 \pmod 4\\ のとき\end{array}\right)\end{cases}$$

証明． 左辺 $=\displaystyle\sum_{m=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{2}{2\cos\frac{2\pi m}{n}}=\sum_{m=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{2}{x^m+x^{-m}}$

$$=\sum_{m=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{2x^m}{x^{2m}+1}=2\sum_{m=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{x^m}{x^{2m}+1}$$

あとは命題4からわかる．(証明終)

更に命題5と関連する次の等式もある．

命題 6. $\displaystyle\prod_{m=1}^{n-1}\cos\frac{2\pi m}{n}=\frac{1}{2^{n-1}}$

(n は3以上の奇数)

証明の前に，いくつかの補題を準備する．

補題 2. x_1, …, x_N のうち異なる n 文字を並べてできる項の和

$Q_n=\displaystyle\sum_{i_1<\cdots<i_n}x_{i_1}\cdot\cdots\cdot x_{i_n}$ は $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}x_i$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}x_i^2$, …, $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}x_i^n$ の定数項のない多項式として表される．

証明． n に関する数学的帰納法を用いる．

$n=1$ のときは明らかに成立する．

$n=l-1$ のとき，この命題が成立すると仮定する．$n=l$ のときに成立することを示すために次の命題(＊)を考える．ただし $l\leqq N$

「$P_{l,m}=\displaystyle\sum_{i_1<\cdots<i_m}\sum_{j\neq i_1\cdots i_m}x_j^{l-m}\cdot x_{i_1}\cdot\cdots\cdot x_{i_m}$ は $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}x_i$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}x_i^2$, $\cdots\displaystyle\sum_{i=1}^{N}x_i^l$ の多項式として表される」…(＊)

ただし $m=0$ のとき $P_{l,0}=\displaystyle\sum_{j=1}^{N}x_j^l$ とすると，$m=0$ のとき(＊)は成立する．

$1\leqq k\leqq l-1$ として

$m=k-1$ のとき(＊)が成立すると仮定する．

$m=k$ のとき

$$\begin{aligned}P_{l,k}&=\sum_{i_1<\cdots<i_k}\sum_{j\neq i_1,\cdots i_k} x_j^{\,l-k}\cdot x_{i_1}\cdots\cdots x_{i_k}\\&=\left(\sum_{j=1}^{N} x_j^{\,l-k}\right)\left(\sum_{i_1<\cdots<i_k} x_{i_1}\cdots\cdots x_{i_k}\right)\\&\quad-\left(\sum_{i_1<\cdots<i_{k-1}}\sum_{j\neq i_1\cdots i_{k-1}} x_j^{\,l-k+1}\cdot x_{i_1}\cdots\cdot x_{i_{k-1}}\right)\\&=\left(\sum_{j=1}^{N} x_j^{\,l-k}\right)Q_k-P_{l,k-1}\end{aligned}$$

Q_k, $P_{l,k-1}$ は $\sum_{i=1}^{N}x_i$, $\sum_{i=1}^{N}x_i^2$, …, $\sum_{i=1}^{N}x_i^n$ の多項式であるから $P_{l,k}$ も $\sum_{i=1}^{N}x_i$, $\sum_{i=1}^{N}x_i^2$, …, $\sum_{i=1}^{N}x_i^n$ の多項式である．ゆえに(＊)は $m=k$ のときにも成立する．数学的帰納法により，$m=l-1$ のとき(＊)は成立する．

ここで
$$\begin{aligned}P_{l,l-1}&=\sum_{i_1<\cdots<i_{l-1}}\sum_{j\neq i_1,\cdots,i_{l-1}} x_j\cdot x_{i_1}\cdots\cdot x_{i_{l-1}}\\&=l\sum_{i_1<\cdots<i_l} x_{i_1}\cdots\cdots x_{i_l}\\&=l\,Q_l\end{aligned}$$

ゆえに Q_l は $\sum_{i=1}^{N}x_i$, $\sum_{i=1}^{N}x_i^2$, …, $\sum_{i=1}^{N}x_i^n$ の多項式であって定数項をもたないものとして表される．ゆえに，補題2は任意の $n\,(\leqq N)$ について成立する．

(証明終)

> **補題 3.**　t が1の原始 n 乗根，n は3以上の奇数とするとき
> $$\prod_{j=0}^{n-1}(1+t^j)=2$$
> $$\prod_{j=1}^{n-1}(1+t^j)=1$$
> $$\prod_{j=2}^{n-1}(1+t^j)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k$$

証明. $t^j=x_j$ とおくとき
$$\begin{aligned}\prod_{j=0}^{n-1}(1+t^j)&=\prod_{j=0}^{n-1}(1+x_j)\\&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{0\leqq j_1<\cdots<j_k\leqq n-1} x_{j_1}\cdots\cdots x_{j_k}\end{aligned}$$

ただし，$k=0$ の項は1である．$k=n$ の項は，$x_0\cdots\cdots x_{n-1}=t^0\cdots\cdots t^{n-1}=t^{\frac{(n-1)n}{2}}=1$ である．

$1\leqq k\leqq n-1$ の項は，補題2から，$\sum_{j=0}^{n-1}x_j$, $\sum_{j=0}^{n-1}x_j^2$, …, $\sum_{j=0}^{n-1}x_j^{n-1}$ の多項式として表される．ただし x_j を含まない定数項はない．$1\leqq m\leqq n-1$ のとき補題1から，$\sum_{j=0}^{n-1}x_j^m=\sum_{j=0}^{n-1}t^{mj}=0$

$1\leqq k\leqq n-1$ のとき，$\sum_{0\leqq j_1<\cdots<j_k\leqq n-1} x_{j_1}\cdots\cdots x_{j_k}=0$

ゆえに $\prod_{j=0}^{n-1}(1+t^j)=1+1=2$

$\prod_{j=1}^{n-1}(1+t^j)=1$

更に，
$$\begin{aligned}\prod_{j=2}^{n-1}(1+t^j)&=\frac{\prod_{j=1}^{n-1}(1+t^j)}{1+t}=\frac{1}{1+t}\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{1-(-t)^n}{1-(-t)}\right\}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-t)^k\end{aligned}$$

(証明終)

命題 6 の証明.

n が3以上の奇数のとき，$x=e^{\frac{2\pi i}{n}}$ とする．$t=x^2=e^{\frac{4\pi i}{n}}$ も1の原始 n 乗根であるから，補題3から，

$$\begin{aligned}1&=\prod_{m=1}^{n-1}(1+t^m)=\prod_{m=1}^{n-1}(1+x^{2m})\\&=\prod_{m=1}^{n-1}x^m(x^m+x^{-m})=x^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{m=1}^{n-1}(x^m+x^{-m})\end{aligned}$$

$x^n=1$ から，

$$1=\prod_{m=1}^{n-1}(x^m+x^{-m})=\prod_{m=1}^{n-1}2\cos\frac{2\pi m}{n}$$

ゆえに $\prod_{m=1}^{n-1}\cos\frac{2\pi m}{n}=\frac{1}{2^{n-1}}$ がわかる．

〈参考文献〉

楠　幸夫「解析函数論」(廣川書店)
高木貞治「初等整数論講義」(共立出版)
大塩達一郎「難問題の系統とその解き方　数学Ⅰ」
(教育社)

(兵庫県立 尼崎北高等学校)