$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0$ $(\lim_{n\to\infty} a_n=\infty,\ \lim_{n\to\infty} b_n=\infty)$ のまとめ

大沢（おおさわ） 健一（けんいち）

1. はじめに

数列の極限を考える場合に扱う基本的な問題の中に

$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3n}{3n^2+1}$ のような $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$

の形のもので 0 以外の定数に収束するものがよく扱われるが，それは

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n^2+4n}$ など $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0$

となる場合をよく理解した上に成り立っている．
また

$\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}$ や $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$

など，すぐには 0 に収束の結論が出にくいものもある．
今回は，

$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0$ $(\lim_{n\to\infty} a_n=\infty,\ \lim_{n\to\infty} b_n=\infty)$

となる実例をまとめてみることにした．

2. 定 義

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ に対して

$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$，$\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$ で $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0$

となるとき "$a_n \gg b_n$" または "$b_n \ll a_n$" と書くと定義する．

3. この定義より分かること

1°．$a_n \gg b_n$，$b_n \gg c_n$ ならば
$a_n \gg c_n$ が成り立つ．

2°．$a_n \gg b_n$ ならば，ある番号 N が存在し，
$n \geqq N$ である n について $a_n > b_n$

3°．$a_n \gg b_n$ ならば，$a_n^2 \gg b_n^2$ が成り立ち，更に $a_n^\alpha \gg b_n^\alpha$ が成り立つ．
（ただし $\alpha>0$）

〔証明〕1°　$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}\cdot\frac{c_n}{b_n}=0$

〔証明〕2°　$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$，$\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$ より，ある番号 N_0 が存在し $n \geqq N_0$ で $a_n>0$ でありかつ $b_n>0$ である．

また $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0$ より $N \geqq N_0$ なる N が存在し

$n \geqq N$ で $\frac{b_n}{a_n}<1$

$a_n>0$ より　$b_n<a_n$

〔証明〕3°　$\alpha>0$ より

$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n^\alpha}{a_n^\alpha}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^\alpha=0$

4. 基本的な実例

1°．1 より大きな整数 k，l に対し a_n，b_n をそれぞれ k 次，l 次の n の整式とし，$k>l$ ならば
$a_n \gg b_n$

2°．1 より大きな整数 k，l，m に対し
$a_n=\sqrt[k]{A_n}$，$b_n=\sqrt[l]{B_n}$ とし，$k>l$ （A_n，B_n は m 次の n の整式）ならば　$a_n \ll b_n$

（証明略）

5. よく扱う重要な実例

$$\log n \underset{①}{\ll} \sqrt[\alpha]{n} \underset{②}{\ll} n \underset{③}{\ll} n^\beta \underset{④}{\ll} \alpha^n \underset{⑤}{\ll} n!$$

（α，β は 1 より大きな整数）

※ 証明の都合上，"≪" の左側より①～⑤とする．

〔証明〕 ②と③については，前述の基本的な実例にもある．証明略．

〔証明〕 ④

(1) $a^n \gg n$ $(a>1)$ を証明する．

$a>1$ より $a=1+H$ $(H>0)$ とおくと

$$(1+H)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1\cdot H + {}_nC_2\cdot H^2 + \cdots\cdots > {}_nC_2\cdot H^2 = \frac{n(n-1)}{2}\cdot H^2$$

ゆえに $\dfrac{1}{(1+H)^n} < \dfrac{2}{n(n-1)\cdot H^2}$

ゆえに $\dfrac{n}{(1+H)^n} < \dfrac{2}{(n-1)\cdot H^2}$ から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{(1+H)^n} = 0$$

よって $a^n \gg n$

(2) (1)の a について，$a>1$ から $a=\alpha^{\frac{1}{\beta}}$

$(\alpha>1,\ \beta>1$ で $\alpha,\ \beta$ は整数$)$

とおけば，(1)から

$(\alpha^{\frac{1}{\beta}})^n \gg n$　$\alpha>1,\ \beta>1$ から

$(\alpha^n)^{\frac{1}{\beta}} \gg n$　3 の 3° から $\{(\alpha^n)^{\frac{1}{\beta}}\}^\beta \gg n^\beta$

よって $\alpha^n \gg n^\beta$

〔証明〕 ⑤

(1) $2^n \ll n!$ について，十分大きな n をとると

$$\frac{2^n}{n!} = \frac{2\cdot2\ \cdots\cdots2\cdot2\cdot2\cdot2}{n(n-1)\cdots\cdots4\cdot3\cdot2\cdot1} < \frac{2\cdot2\ \cdots\cdots2\cdot2\cdot2\cdot2}{n(n-1)\cdots\cdots4\cdot3}$$

$$= \frac{2\cdot2\ \cdots\cdots2\cdots\cdots2\cdots\cdots2\cdot2\cdot2\cdot2}{n(n-1)\cdots\cdots3^3\cdots\cdots3^2\cdots\cdots4\cdot3}$$

$$= \frac{2\cdot2\ \cdots\cdots2\cdots\cdots2\cdots\cdots2\cdot2\cdot2\cdot2}{n(n-1)\cdots\cdots3^2\cdots\cdots3\cdots\cdots4\cdot3\cdot3\cdot3} < \frac{2^n}{3^n}$$

ゆえに $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$　　したがって $2^n \ll n!$

(2) 同様に $\alpha^n \ll n!$ の証明についても十分大きな n について $n! = n(n-1)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1$ の各自然数の因数の中には，

$(\alpha+1),\ (\alpha+1)^2,\ \cdots\cdots,\ (\alpha+1)^m$

(ただし m は α によって決まる自然数)が存在して次の不等式を満足する．

$$\frac{\alpha^n}{n!} < \frac{\alpha^n}{(\alpha+1)^n}$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^n}{n!}=0$　　したがって $\alpha^n \ll n!$

〔証明〕 ①

(1) $\sqrt{n} \gg \log n$ について

$f(x)=\sqrt[3]{x}-\log x$ とおくと $f'(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}-3}{3x}$

x	0		27	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	極小	↗

また $f(10^3)=10-\log 10^3=\log\dfrac{e^{10}}{10^3}$

ここで $2<e<3$ より $2^{10}<e^{10}$

ゆえに $1<\dfrac{2^{10}}{10^3}<\dfrac{e^{10}}{10^3}$　　したがって $f(10^3)>0$

増減表より $27<10^3$ から

$x>10^3$ のとき $f(x)>0$

ゆえに $n\geqq10^3$ なる n について $\log n<\sqrt[3]{n}$

よって $\dfrac{\log n}{\sqrt{n}}<\dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}$

これより $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{\sqrt{n}}=0$

したがって $\sqrt{n}\gg\log n$

(2) $\sqrt[\alpha]{n}\gg\log n$ について $(\alpha>1,\ \alpha$ は整数$)$

(1)と同様に

$g(x)=\sqrt[\alpha+1]{x}-\log x$ とおくと

$$g'(x)=\frac{\sqrt[\alpha+1]{x}-(\alpha+1)}{(\alpha+1)x}$$

x	0		$(\alpha+1)^{\alpha+1}$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		↘	極小	↗

ここで④ $\alpha^n\gg n^\beta$ より $(\beta>1$，整数$)$

$2^n\gg n^\beta$ が成立し，1 の 2° より，ある番号 N が存在し，$n\geqq N$ を満たす n について

$2^n>n^\beta$ となる．

ゆえに $1<\dfrac{2^n}{n^\beta}<\dfrac{e^n}{n^\beta}$　ここで $\beta=\alpha+1$

とおきなおすと $\dfrac{e^n}{n^{\alpha+1}}>1$

よって，十分大きな p が存在して $g(p^{\alpha+1})>0$

すなわち $g(p^{\alpha+1})=p-\log p^{\alpha+1}$

$$=\log\frac{e^p}{p^{\alpha+1}}>0$$

とすることができる．

したがって，増減表より $p^{\alpha+1}>(\alpha+1)^{\alpha+1}$ から

$x>p^{\alpha+1}$ において $g(x)>0$

ゆえに $M>p^{\alpha+1}$ なる自然数 M が存在し $n\geqq M$ に

おいて $\sqrt[\alpha+1]{n}-\log n>0$

よって $\sqrt[\alpha+1]{n}>\log n$

ゆえに $\dfrac{\log n}{\sqrt[\alpha]{n}}<\dfrac{\sqrt[\alpha+1]{n}}{\sqrt[\alpha]{n}}$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{\sqrt[\alpha]{n}}=0$　したがって $\log n\ll\sqrt[\alpha]{n}$

6. おわりに

5の実例において α, β は1より大きな整数としたが，整数という条件は容易にはずすことができ

$$\boxed{\begin{array}{l}\log n\ll n^{\frac{1}{\alpha}}\ll n\ll n^{\beta}\ll \alpha^{n}\ll n! \\ \quad(\text{ただし}\quad \alpha>1,\ \beta>1)\end{array}}$$

が成り立つ．

(静岡県立 磐田南高校)