# 問題作成の2，3の方法

清水（しみず）　克芳（かつよし）

授業で生徒に練習問題を与えるときや試験問題を作るときなど，問題や答を手頃な数値にしたいことがよくある．ここではそのような問題作成の方法を2点紹介しよう．

## ［Ｉ］　対数方程式

対数方程式

$$\log_2(x+1)+\log_2(x-2)=2$$

のように，対数をはずすと2次方程式になる方程式で，整数解をもつものについて考えてみる．

これは2次方程式

$$x(x-p)=a^n \quad \cdots\cdots ①$$

で整数解をもつものを考えると，両辺の$a$を底とする対数をとれば，

$$\log_a x+\log_a(x-p)=n$$

となるため，あとは$x$を任意におきかえればよい．

$\boxed{例}$ 1.　$x^2-3x-4=(x+1)(x-4)$ から，

$$x(x-3)=4$$

ゆえに　$\log_2 x+\log_2(x-3)=\log_2 4=2$

$x$を $x+1$ におきかえて，

$$\log_2(x+1)+\log_2(x-2)=2$$

これが最初の例である．

以下，同様の式変形から問題を作ってみた．

$\boxed{問題1}$　i）　$\log_2(x-2)+\log_2(x-4)=3$

ii）　$\log_3(x+3)+\log_3(x-5)=2$

次に対数をはずしたときに3次方程式になる形

$$\log_a(x-p)+\log_a(x-q)+\log_a(x-r)=n$$

について考えたい．これも $r=0$ として，対数をはずした3次方程式

$$x^3-(p+q)x^2+pqx-a^n=0 \cdots\cdots ②$$

が整数解をもつようにすればよい．

いま，②の解を $\alpha$，$\beta$，$\gamma$ とすると，

$$\alpha+\beta+\gamma=p+q \quad \cdots\cdots ③$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=pq \quad \cdots\cdots ④$$

$$\alpha\beta\gamma=a^n \quad \cdots\cdots ⑤$$

となる．③，④から，

$$\alpha\beta=(\gamma-p)(\gamma-q)$$

が得られる．また⑤から $\alpha\beta\gamma>0$ であるため，結局③，④，⑤を満たす（$\alpha$，$\beta$，$\gamma$，$p$，$q$）の組は次のようにして求められる．

i）　$\alpha$，$\beta>0$ を任意に定める．

ii）　$\alpha\beta=st$ となる $s$，$t$（$s$，$t>0$ としてよい）を適当に定め，$\gamma=\alpha+\beta+s+t$　とおく．

iii）　$p=\gamma-s$，$q=\gamma-t$ とすれば，求める（$\alpha$，$\beta$，$\gamma$，$p$，$q$）の組が得られる．

ただし，⑤から $\alpha\beta\gamma$ が自然数のべきとなるため，$\alpha$，$\beta$ をうまく選ぶとよい．

$\boxed{例}$ 2.　$\alpha=\beta=2$ のとき

i）　$s=1$，$t=4$ とすれば，

$$\gamma=9,\ p=8,\ q=5$$

よって $x(x-5)(x-8)=36$ より，

$$\log_6 x+\log_6(x-5)+\log_6(x-8)=2$$

$x$を $x+1$ におきかえて，

$$\log_6(x+1)+\log_6(x-4)+\log_6(x-7)=2$$

ii）　$s=t=2$ とすれば，

$$\gamma=8,\ p=q=6$$

よって $x(x-6)^2=32$ から，

$$\log_2 x+2\log_2(x-6)=5$$

$x$を $x+3$ におきかえて，

$$\log_2(x+3)+2\log_2(x-3)=5$$

なお，例2．ii）のように $s=t$ としたときは，

$$2\log_a(x-k)+\log_a(x-l)=n$$

の形の式になる．

**問題2** i) $\log_{12}(x-1)+\log_{12}(x-2)+\log_{12}(x+3)=1$

ii) $\log_{12}(x-3)+\log_{12}(x+7)+\log_{12}(x-10)=2$

iii) $2\log_6(x-4)+\log_6(x+3)=2$

## [II] 複2次式の因数分解

複2次式の因数分解で次の形の問題が出題されることがままある.

$$
\begin{aligned}
&(x-4)(x-2)(x+5)(x+7)-360\\
&=(x^2+3x-28)(x^2+3x-10)-360\\
&=(x^2+3x)-38(x^2+3x)-80\\
&=(x^2+3x+2)(x^2+3x-40)\\
&=(x+1)(x+2)(x-5)(x+8)
\end{aligned}
$$

この問題ではまず, 最初の式は4つの1次式の積に定数が加えられた形をしている. 次にその4つの因数の組み合わせを考え, $x^2+3x$ という項を作る(2行目). 更に $x^2+3x$ について展開し(3行目), もう一度因数分解する(4行目). そして最後に, いま現れた2つの2次式を更に因数分解して(5行目)初めて完了するという, 因数分解づくしの問題である. この問題の特徴は,

i) 最初の式が4つの1次式の積になっていること

ii) 最後の式も(整数の範囲で)1次式の積に因数分解できること

の2点であろう. ここではこの2点を満たすような式の係数を得る方法について論じていく.

問題を一般化すると, 恒等式

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+A=(x+p)(x+q)(x+r)(x+s) \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つように9つの整数の組($a$, $b$, $c$, $d$, $p$, $q$, $r$, $s$, $A$)の関係を調べればよいということになる. いま,

$$a\leqq b\leqq c\leqq d,\ p\leqq q\leqq r\leqq s$$

としてよい. 後におきかえることを考えて $a$ と $d$, $b$ と $c$, $p$ と $s$, $q$ と $r$ をそれぞれ組み合わせて展開すると,

$$(\text{左辺})=\{x^2+(a+d)x+ad\}\{x^2+(b+c)x+bc\}+A$$

$$(\text{右辺})=\{x^2+(p+s)x+ps\}\{x^2+(q+r)x+qr\}$$

となるから,

$$a+d=b+c=p+s=q+r$$

でなければならない. また更に展開して係数比較すると, 結局①を満たす整数の組は次の3条件を満たせばよいことになる.

$$a+d=b+c=p+s=q+r \quad \cdots\cdots ②$$
$$ad+bc=ps+qr \quad \cdots\cdots ③$$
$$abcd+A=pqrs \quad \cdots\cdots ④$$

(ただし, $a\leqq b\leqq c\leqq d$, $p\leqq q\leqq r\leqq s$)

ここで $A$ の値については, ④より他の8つの値から決まってくるため, 実質的には②, ③を満たす8つの整数の組($a$, $b$, $c$, $d$, $p$, $q$, $r$, $s$)を求めればよい.

さて, それでは実際に上の8つの数の組を求めてみよう. 後で変数変換が可能なため,

$a=0$, $p>0$

としてよい. このとき②, ③, ④は, それぞれ

$$d=b+c=p+s=q+r \quad \cdots\cdots ②'$$
$$bc=ps+qr \quad \cdots\cdots ③'$$
$$A=pqrs \quad \cdots\cdots ④'$$

となる. したがって②′から, 1つの自然数を2つの自然数の和で何通りかに表わし, ③′が成り立つかどうかを1つずつ見ていけばよい.

すなわち, まず $d$ の値を定め, $d=b+c$ と2数の和に分解する方法をすべて考え, $bc$ の値も求める. この $bc$ の値のうち, 他の2つの和であるものを探せばよい.

例えば $d=13$ のとき,

$13=1+12=3+10=6+7$

であり, かつ

$1\cdot12+3\cdot10=6\cdot7$

でもあるため,

$(b,\ c,\ d,\ p,\ q,\ r,\ s)=(6,\ 7,\ 13,\ 1,\ 3,\ 10,\ 12)$

が得られる. このとき $A=pqrs=360$ となるから, 求める式は

$$x(x+6)(x+7)(x+13)+360=(x+1)(x+3)(x+10)(x+12)$$

である. この式において $x$ を $x-5$ におきかえ, 360を移項したものが最初の例題である.

最後に　$b$，$c$，$d$ の値を表にしてみた．また実際に作った問題も挙げておく．

**問題３**

i）　$x(x+4)(x+7)(x+11)+180$

ii）　$(x-1)(x-2)(x+5)(x+6)-144$

iii）　$(x+1)(x+2)(x-2)(x+5)+36$

iv）　$(x+4)(x+5)(x-7)(x-8)-1260$

以上，つたない研究ではあるが，問題作成等の参考にしていただければ幸いである．

注．$d=7$ のときのように，同じものの和でもよい．また，$d=14$ の例は，$d=7$ のものを２倍したものに過ぎない．

| $d$ | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b$ | 1 2 | 1 2 3 | 1 2 3 | 1 2 3 4 | 1 2 3 4 | 1 2 3 4 5 | 1 2 3 4 5 |
| $c$ | 4 3 | 5 4 3 | 6 5 4 | 7 6 5 4 | 8 7 6 5 | 9 8 7 6 5 | 10 9 8 7 6 |
| $bc$ | 4 6 | 5 8 9 | 6 10 12 | 7 12 15 16 | 8 14 18 20 | 9 16 21 24 25 | 10 18 24 28 30 |
| | | | 6+6=12 | | | 9+16=25 | 10+18=28 |
| $A$ | | | 36 (注) | | | 144 | 180 |

| $d$ | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|
| $b$ | 1 2 3 4 5 6 | 1 2 3 4 5 6 | 1 2 3 4 5 6 7 | 1 2 3 4 5 6 7 |
| $c$ | 11 10 9 8 7 6 | 12 11 10 9 8 7 | 13 12 11 10 9 8 7 | 14 13 12 11 10 9 8 |
| $bc$ | 11 20 27 32 35 36 | 12 22 30 36 40 42 | 13 24 33 40 45 48 49 | 14 26 36 44 50 54 56 |
| | | 12+30=42 | 24+24=48 | 14+36=50 |
| $A$ | | 360 | 576 (注) | 504 |

| $d$ | 16 | 17 |
|---|---|---|
| $b$ | 1 2 3 4 5 6 7 8 | 1 2 3 4 5 6 7 8 |
| $c$ | 15 14 13 12 11 10 9 8 | 16 15 14 13 12 11 10 9 |
| $bc$ | 15 28 39 48 55 60 63 64 | 16 30 42 52 60 66 70 72 |
| | | 30+42=72，30+30=60 |
| $A$ | | 1260　900 |

（広島女学院中学高等学校）