A NOVEL WAY TO FACTOR QUADRATIC POLYNOMIALS について

かなめ　まさたか
要　真隆

1. はじめに

数学Ｉの授業で２次式の因数分解をやった．

例えば，$2x^2+5x+2=(x+2)(2x+1)$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \times & 2 & \to & 4 \\ \underline{2} & & \underline{1} & \underline{\to} & \underline{1} \\ & & & & +5 \end{array}$$

のように，“たすき掛け”で教えた．長年，これで教えている(ほとんどの数学教師が，この方法で教えていると推測される)．……(注$_1$)

テストをやってみると，ほとんどの生徒がこの種の問題を正解していた．

しかし，本当に，この方法は容易にできるのであろうか？　というのも

$6x^2-5x-4=(6x\qquad)(6x\qquad)$ ……　(＊)

で終わっている答案を見い出したからである(実は，この生徒は本校の外国語コースに在籍する帰国子女であった)．

昨年，夏季セミナーで数Ｉセミナーを担当したとき，１人の女子生徒(普通科)は，“たすき掛け”による因数分解が全くできなかったことを思い出す．そのときは，大変驚いたものである．

『たすき掛けによる因数分解』は，数学の不得手な生徒にとって，試行錯誤を伴うので，かなり難しいのではないかと思う．どうして，(＊)のようにしたのか予測するしかない．

考えられることは，$6x^2$ を $(6x)^2$ と錯覚する単純なミスによるもの，すなわち，中学で学んできている“たすき掛け”を用いない因数分解，例えば，

$$x^2+3x+2=(x\qquad)(x\qquad)$$

と同様な発想によるもの，もう１つは，外国で習っていた方法によるもの，更に，本当に単純なミスによるものなどである．

このような間違いをする生徒の発想の中に正解を導き出す方法があることを，私は気がついた．

実は，(＊)を見て，10数年前にみた数学の書物の一部をハッと思い出したのである．

それが，“たすき掛け”によらない新しい因数分解の方法

“A NOVEL WAY TO FACTOR
QUADRATIC POLYNOMIALS”

である．

このことについて，自分なりに展開してみたい．

(注$_1$)　“たすき掛け”の因数分解に悩まされている生徒は非常に多い．中学校で学んできている

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

の形ならかなりの生徒が理解しているのに，高校で，“たすき掛け”があるために計算ミスをし，因数分解が嫌いになり，数学嫌いが増加する．

2. 新しい因数分解の方法の具体例とその意味付け

例えば，２次式 $8x^2+10x+3$ を因数分解してみよう(8，10，3は互いに素であることに注意)．

x^2 の係数が８の場合，２つの(　　)に $8x$ を書く．

$(8x\qquad)(8x\qquad)$ ……　①

次に，積が24，和が10となる整数を探す．これは，４と６である．

$$\overbrace{8x^2+\underbrace{10}_{\text{和}10}x+3}^{\text{積}24}$$

この４と６を○または△に代入する．すると，

$(8x+4)(8x+6)$ ……②

②式は，明らかに，$8x^2+10x+3$ の因数分解ではない．更に，②式の８，４の最大公約数４，８，６の最大公約数２でおのおのの１次式を割る．すると，

$$(2x+1)(4x+3)$$

が得られる．これが，求める因数分解となる．

すなわち

$$\mathbf{8x^2+10x+3=(2x+1)(4x+3)}$$

(注$_2$)　以後，整数 a，b，c の最大公約数を
$(a,\ b,\ c)$ と表す．

以上，簡単にまとめると次のようになる．

積 24

$8x^2+\underline{10}x+3$　　(8, 10, 3)=1

↓　和 10　　　　互いに素

$(8x\quad)(8x\quad)$

↓　積 24，和 10 となる整数を探す．〈4 と 6〉

$(8x+4)(8x+6)$

4　　2

↓　(8, 4)=4，(8, 6)=2 でおのおのの 1 次式を割る．

$(2x+1)(4x+3)$ ……これが求める因数分解

すなわち

$$\mathbf{8x^2+10x+3=(2x+1)(4x+3)}$$

それでは，この方法で，次の 2 次式の因数分解をやってみよう．

例1　$2x^2+5x+2$

(解)　$2x^2\underline{+5}x+2$　(2, 5, 2)=1

↓

$(2x\quad)(2x\quad)$

↓　積 4，和 5 となる整数を探す．〈1 と 4〉

$(2x+1)(2x+4)$

↓　1　　2

$(2x+1)(x+2)$ …… 求める因数分解

例2　$2x^2+x-15$

(解)　$2x^2\underline{+1}\cdot x-15$　(2, 1, −15)=1

↓

$(2x\quad)(2x\quad)$

↓　積 −30，和 +1 となる整数を探す．〈6 と −5〉

$(2x+6)(2x-5)$

↓　3　　1

$(x+3)(2x-5)$ …… 求める因数分解

例3　$6x^2-x-12$

(解)　$6x^2\underline{-1}\cdot x-12$　(6, −1, −12)=1

↓

$(6x\quad)(6x\quad)$

↓　積 −72，和 −1 となる整数を探す．〈−9 と 8〉

$(6x-9)(6x+8)$

↓　3　　2

$(2x-3)(3x+4)$ …… 求める因数分解

例4　$3x^2-10x+8$

(解)　$3x^2\underline{-10}x+8$　(3, −10, 8)=1

↓

$(3x\quad)(3x\quad)$

↓　積 24，和 −10 となる整数を探す．〈−4 と −6〉

$(3x-4)(3x-6)$

↓　1　　3

$(3x-4)(x-2)$ …… 求める因数分解

例5　$x^2+14x+48$

(解)　$1\cdot x^2\underline{+14}x+48$　(1, 14, 48)=1

↓

$(x\quad)(x\quad)$

↓　積 48，和 14 となる整数を探す．〈6 と 8〉

$(x+6)(x+8)$ …… 求める因数分解

例6　$16x^2+20x+6$

(解)　$16x^2\underline{+20}x+6$　(16, 20, 6)≠1

↓

$(16x\quad)(16x\quad)$

↓　積 96，和 20 となる整数を探す．〈8 と 12〉

$(16x+8)(16x+12)$

↓　8　　4

$(2x+1)(4x+3)$

この 2 次式は，$16x^2+20x+6$ の因数分解ではない．例 6 は，実は，この方法ではうまくいかないのである．なぜなら，(16, 20, 6)=2≠1 であるから (→ 後述)

$$16x^2+20x+6=2(8x^2+10x+3)$$

のように，初めに共通因数でくくってから，上述の方法で $8x^2+10x+3$ を因数分解すればよい．

すなわち　$\mathbf{2(2x+1)(4x+3)}$

では，なぜこの新しい方法でうまくいくのか．最初の例で，その意味付けをしてみよう．

$A=8x^2+10x+3$ とおくと

$8A=(8x)^2+8\cdot10x+8\cdot3$

$=(8x)^2+\underbrace{10}_{\text{和}}(8x)+\underbrace{8\cdot3}_{\text{積}}$

ここで，$8x=t$ とおくと

$8A=t^2+10t+24=(t+4)(t+6)$

t を $8x$ に置き戻して

$8A=(8x+4)(8x+6)$

$8=(8, 4)(8, 6)$ に注意すれば

$$A=\frac{1}{8}\underbrace{(8x+4)}_{4}\underbrace{(8x+6)}_{2}=\frac{(8x+4)(8x+6)}{(8,\ 4)(8,\ 6)}$$

$$=\frac{(8x+4)}{(8,\ 4)}\cdot\frac{(8x+6)}{(8,\ 6)}=(2x+1)(4x+3)$$

となる．

更に，$B=16x^2+20x+6$ が形式的にこの方法でうまくいかないのか．その理由を考えてみよう．

$16B=(16x)^2+20(16x)+16\cdot 6$

ここで，$16x=t$ とおくと

$16B=t^2+20t+96=(t+8)(t+12)$

$\quad=\underbrace{(16x+8)}_{8}\underbrace{(16x+12)}_{4}$

$32B=2(16x+8)(16x+12)$

$\quad 32=(16,\ 8)(16,\ 12)$

$\quad\ 2=(16,\ 20,\ 6)$

に注意すれば

$$B=(16,\ 20,\ 6)\frac{(16x+8)}{(16,\ 8)}\cdot\frac{(16x+12)}{(16,\ 12)}$$

すなわち，$(16,\ 20,\ 6)=2\neq 1$ であるから，うまくいかなかったわけである．この方法は，x，y についての2次式にも応用することができる．

例7 $3x^2-7xy-20y^2$

$3x^2-7xy-20y^2$

$=3x^2+(-7y)x-20y^2$

$\downarrow (3,\ -7,\ -20)=1$

$(3x\qquad)(3x\qquad)$

$\downarrow$ 積 $-60y^2$，和 $-7y$ となる組合せは，$\langle -12y,\ 5y\rangle$

$\underbrace{(3x-12y)}_{3}\underbrace{(3x+5y)}_{1}$

$\downarrow$

$(x-4y)(3x+5y)$ …… 求める因数分解

例8 $2x^2+5xy+2y^2+x+5y-3$

$2x^2+5xy+2y^2+x+5y-3$

$=2x^2+5xy+x+2y^2+5y-3$

$=2x^2+(5y+1)x+(y+3)(2y-1)$

$\downarrow$

$(2x\qquad)(2x\qquad)$

$\downarrow$ 積 $2(y+3)(2y-1)$，和 $5y+1$ となる組合せは，$\langle y+3,\ 2(2y-1)\rangle$

$\underbrace{\{2x+(y+3)\}}_{1}\underbrace{\{2x+2(2y-1)\}}_{2}$

$\downarrow$

$(2x+y+3)(x+2y-1)$ …… 求める因数分解

(参考)

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{a}(ax+r)(ax+s)$$

ただし，$rs=ac$，$r+s=b$

＊覚え方

① x^2 の係数の逆数でくくり2つの(　　)に ax を書く．

② 次に，積が ac，和が b となる2数 r，s を探して書く．

③ そして，(　　)の中の共通因数を外に出して整理する．

(注₃) $(a,\ b,\ c)=\alpha\neq 1$ の場合は，共通因数 α でくくってから，①〜③を行う．

3. 定理と簡単な証明

定理

$a>0$，a，b，c は互いに素な整数

$\begin{cases} rs=ac \\ r+s=b \end{cases}$ を満たす整数 r，s が存在したとすると $ax^2+bx+c=\dfrac{(ax+r)}{(a,\ r)}\cdot\dfrac{(ax+s)}{(a,\ s)}$

と因数分解される．

$$(\text{右辺})=\frac{1}{(a,\ r)(a,\ s)}(ax+r)(ax+s)$$

であるから，$(a,\ r)(a,\ s)=a$ を示せばよい．

<Lemma>

$a>0$，a，b，c は互いに素な整数

r と s が，$rs=ac$，$r+s=b$

$\Rightarrow (a,\ r)(a,\ s)=a$

(証明)

(i) $a=1$ のとき，$(a,\ r)(a,\ s)=1$ で成立する．

(ii) $a>1$ のとき，p：a をちょうど k 回割っている素数とする．$(a/p^k=a' \rightarrow a=a'\cdot p^k)$

$ac=rs$ であるから，$p^i|r$ かつ $p^j|s$

(ただし，$i+j\geqq k$) となる i，j がある．

なぜなら，
$$ac=rs$$
$$a'p^kc=rs$$
$$a'p^ip^jc=rs$$
$$a'c=(r/p^i)(s/p^j)$$

であるから(p はまた，c を割っているかも知れないし，i または j は0かもしれないということに注

意せよ). よって，p は，$(a,\ r)(a,\ s)$ を少なくとも k 回割っている素数である.

もし，$i+j=k$ ならば，Lemma は成立する.

それゆえ，$i+j>k$ と仮定すると，$p|c$，i も j も 0 でなければ，$p|a$，$p|r$，$p|s$，しかも，$b=r+s$ であるから，$p|b$. これは，a，b，c が互いに素であるという仮定に反する. よって，もし，$i+j>k$ ならば，i または j は 0 である.

ゆえに，$(a,\ r)$ または $(a,\ s)$ の一方は p なる因数をもたない. 他方は，p^k なる因数をもつ.

結局，$(a,\ r)(a,\ s)$ の各素因数は a の因数であるから，a と $(a,\ r)(a,\ s)$ は同じ因数に分解され一致する. (証明終り)

(注4) $(a,\ b)$：a，b の最大公約数
$a|b$：b は a で割り切れるの意

4. おわりに

帰国子女の生徒 2 人に上述の『新しい因数分解の方法』を教えたら，このほうが『たすき掛け』による方法より簡単であるといっていた (パラグァイにいたときは，たすき掛けでなくえらく複雑なことをやったので，はっきり覚えていないらしい).

我々教師は，ややもすると教え方が一面的になり，うっかり生徒の発想を見過しがちである. 発想を生かす教え方も必要である. 教え方の幅を広げるために，この新しい方法は有効ではないか.

この方法は，例 6 のようなミスさえ注意すれば，あとは手順どおり進めるとうまく解ける良さがある. その意味で，この新しい方法は，数学の不得手な生徒を救う解決策の 1 つにもなるのではなかろうか.

この方法を思いつくことは確かに難しいが，簡単な例でその意味付けはできる.

数学教育では，単にその解法に習熟させることだけでは不十分で，その数学的な意味そのものを十分に理解・認識させたり，解法に至るプロセスが大事である. 特に，発想を大事にしたいものである.

2 次式の因数分解は，どうしてこの方法でできるのか？

とくに，“ advanced students ” に対して，この方法を考えさせることは，教育的で，面白く，意義深いのではないかと思う.

機会があれば，このような授業を是非やってみたい.

最後になりましたが，外国の文献 (題名は忘れた) を引用したこと，日数協全国研究 (奈良) 大会資料が参考になることをお断りしておきます.

(埼玉県立 浦和第一女子高等学校)

この原稿は要先生が南稜高等学校に在任中に書かれた論文です. (編集部)