虚数の歴史

複素数の定義

坂本　茂（さかもと　しげる）

この拙文では，3次方程式の解を求めることから生まれた複素数が，数学者達によってどのようにとらえられ，定義されていったかを歴史的に書いてみたい．

1

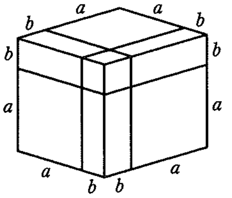
以前「高校数学における複素数」(数研通信 No. 14)で2次までの代数方程式の解に関する限りは虚数を考える必要性がないことを述べた．
また，因数分解公式

$$x^3+y^3+z^3-3xyz$$
$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

により3次方程式の解の公式が求められることを示した．現今の数学書ではこのようにして
G. Cardano(1501-1576)の公式を導いていないようである．3次および4次方程式の解法は16世紀イタリアの数学者 Ferro(1465？-1526)，Tartaglia (1499？-1557)，Cardano，Ferrari(1522-1560？)，Bombelli(1530？-1572？)等によって研究された．

その後 Cardano の著書 Ars Magna(1545)ではどのように記述されているか調べてみた．数式で書かれているのではなく図形で説明されている．それはおおよそ次のようなものである．1辺の長さ x の立方体で辺の長さを a と b に2分して考えると

$$x^3=a^3+b^3+3abx$$



である．これは x の3次方程式で $x=a+b$ は解であるのだから，$x^3=px+q$ の形の3次方程式は

$$p=3ab,\quad q=a^3+b^3$$

とおき，a，b を求めればよいことになる．$A=a^3$，$B=b^3$ とすれば，この2数の和と積は

$$A+B=q,\quad AB=\frac{p^3}{27}$$

である．これを求めるには2次方程式を解けばよいわけであるが，これも図形によって求めて

$$\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}$$

を得ている．よって $x=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$ としている．

この方法により実際の方程式を解くと明らかに実数解の場合でも平方根の中が負の数になることがでてくる．Bombelli は明らかに解が4とわかる方程式 $x^3=15x+4$ を考えた．他の解は $-2\pm\sqrt{3}$ であるが，公式によると A，B は $2\pm\sqrt{-121}$ となる．しかし，この場合でも彼は公式が正しい解を与えることを示した．それは

$$(2\pm\sqrt{-1})^3=2\pm\sqrt{-121}$$

と計算し A，B の立方根を知り $x=4$ を得たのである．これは虚数の計算であるが詭弁に過ぎないと思ったようである．しかし，複素数の計算法がここで確立されたのである Lalgebra(1572)．

2

複素数の計算は次第に普及し用いられるようになる．その間に F. Viete(1540-1603)により三角法は完成し数式も使われるようになり，Rene Descartes (1596-1650)により座標平面も考えられた．そして Newton(1642-1727)，Leibniz(1646-1716)が微分積分法を発見する．A. de Moirvre(1667-1754)は彼の名で呼ばれる公式

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

を導いた．

Euler(1707-1783)は「無限小解析序論」(1748)で J. Bernoulli(1667-1748)によって知られた式

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

を載せている．また彼は Fermat(1601-1665)の大定理のうち $x^3+y^3=z^3$ を証明するとき複素数を考え

ている．そして，これ以後 Gauss(1777-1855)の複素整数の理論が展開されることになる．複素整数とは m，n が整数のとき複素数 $m+ni$ のことをいい，例えばこれを 2 乗して

$$(m+in)^2=m^2-n^2+2mni$$

であるから，両辺の絶対値の平方を考え

$$(m^2+n^2)^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2$$

となり Pythagoras 数を与える式ができる．

しかし，まだ複素数の計算は便宜的なものと考えられていた．代数方程式はその次数だけの個数の複素数解をもつという「代数学の基本定理」は Gauss 以前から述べられていた．この厳密な証明がなされたのは，彼の 1799 年の学位論文においてであるが，その表題は「すべての 1 変数の有理関数は 1 次または 2 次の実因数に分解できるという定理の新証明」となっていて，このときはまだ複素数を表に出そうとしていない．

彼は 1831 年の複素整数の論文で初めて，複素数を平面に図示したことから，複素数平面がガウス平面と呼ばれるようになった．

3

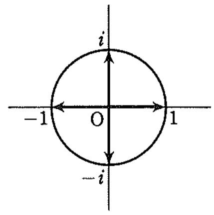
欧州に広く普及した 1770 年出版 Euler の「代数学入門」の中にさえ $\sqrt{-2}\sqrt{-3}=\sqrt{6}$ 等と記載されている．これは盲目となった彼が口述筆記して書かせたときの誤りとも思えない．根号計算では実数に対する法則が虚数に対しては保存されないのである．虚数を認識するのに $\sqrt{-2}=\sqrt{2}\sqrt{-1}$ と考える必要がある．しかし Euler は Gauss の生まれた年である 1777 年に発表した論文で $\sqrt{-1}$ の記号としてはじめて i を用いている．

虚数単位 i を図示したのは 1797 年ノルウェーの測量技師 C. Wessel である．横方向の単位を 1，-1，垂直方向の単位を ε，$-\varepsilon$ として表し積を方向角の和で定めると数の演算と同じになることを示した．方向をもった線分の和と積を定義している．

数の積 $(-1)\times(-1)$，i^2，$(-1)\times i$ は回転により次の図から理解される．-1 を掛けることは 180 度回転，i を掛けることは 90 度回転であり，i が平方して -1 になる数ということも図式化される．

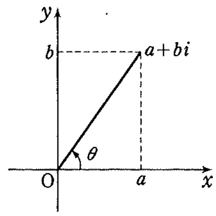
$$(-1)\times(-1)=1,\quad i^2=-1,\quad (-1)\times i=-i$$

これは会計士 R. Argand(1768-1822)が 1806 年考えたもので，複素数平面が Gauss-Argand 平面と呼ばれることもあるが，当時は両者の論文とも好奇的な表示と見られたに過ぎなかった．



実数 a，b に対し $a+bi$ に複素数の名を与えたのは Gauss である．そして a を x 座標，b を y 座標とする直交座標上の点$(a,\ b)$として表した複素数平面を考えた．すると加法に関してはベクトルの加法と同じである．

$$(a_1,\ b_1)\pm(a_2,\ b_2)=(a_1\pm a_2,\ b_1\pm b_2)$$



乗法に関しては複素数を極座標$[r,\ \theta]$で表すと明確になる．

すなわち

$$a=r\cos\theta,\quad b=r\sin\theta,\quad r=a^2+b^2$$

であり，r は絶対値，θ は偏角である．

$$[r_1,\ \theta_1]\times[r_2,\ \theta_2]=[r_1r_2,\ \theta_1+\theta_2]$$

絶対値は積，偏角は和となり回転を与える．このことが成り立つことは三角関数の加法定理による．

4

しかし 18 世紀までは複素数はまだ定義されてはおらず，ただ便宜的な計算であった．19 世紀になって N. H. Abel(1802-1829)，E. Galois(1811-1832)により，5 次以上の高次方程式に代数的解法が不可能であることの証明が与えられた．複素数が定義されるようになったのは，現代代数学の進歩によるものである．W. R. Hamilton(1805-1865)は 1837 年複素数を実数の対で表すことで定義した．これにより複素数体の定義を与えると次のようになる．

実数 a，b の順序対$(a,\ b)$の集合を C とし，加法と乗法を次のように定義する．

$$(a,\ b)+(c,\ d)=(a+c,\ b+d)$$

$$(a,\ b)\times(c,\ d)=(ac-bd,\ ad+bc)$$

すると集合 C は体をなす．すなわち加法，乗法に関して交換法則，結合法則が成り立ち，分配法則も成り立つ．ゼロ元は$(0,\ 0)$，単位元は$(1,\ 0)$であり，任意の元$(a,\ b)$に加法の逆元$(-a,\ -b)$

また，ゼロ元以外に乗法の逆元

$$(a,\ b)^{-1}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\ \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

がある．よって，C は体をなし減法，除法は

$$(a,\ b)-(c,\ d)=(a-c,\ b-d)$$

$$(a,\ b)\div(c,\ d)=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\ \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$

となる．

ここで$(a,\ 0)$のものだけを考えると

$$(a,\ 0)\pm(c,\ 0)=(a\pm c,\ 0)$$

$$(a,\ 0)\times(c,\ 0)=(ac,\ 0)$$

$$(a,\ 0)\div(c,\ 0)=\left(\frac{a}{c},\ 0\right)$$

このことは，$(a,\ 0)$が実数aと同一視できることで集合 C が実数の集合の拡大体になっているわけである．しかし$(0,\ b)$は実数bと同一視できないことが計算法則でわかる．

元$(0,\ -1)$をiで表すと

$$i^2=(0,\ -1)\times(0,\ -1)=(-1,\ 0)=-1$$

であるから平方して -1 になる数である．

$$(0,\ b)=(b,\ 0)\times(0,\ 1)=(b,\ 0)\times i=bi$$

と書けるから任意の C の元は

$$(a,\ b)=(a,\ 0)+(0,\ b)=a+bi$$

で表すことができる．Hamilton は対$(0,\ -1)$すなわちiが実数の組として実存するものであるといっているのである．

前節の複素数平面で複素数の積を極座標で表し回転として $(a,\ b)=[r,\ \alpha]$, $(c,\ d)=[s,\ \beta]$ の積を定義すると

$$\begin{aligned}(a,\ b)\times(c,\ d)&=[r,\ \alpha]\times[s,\ \beta]\\&=[rs,\ \alpha+\beta]\\&=(rs\cos(\alpha+\beta),\ rs\sin(\alpha+\beta))\end{aligned}$$

である．ここで三角関数の加法定理により

$$rs\cos(\alpha+\beta)=ac-bd$$

$$rs\sin(\alpha+\beta)=bc+ad$$

となるから上記と同様の複素数の和と積

$$(a,\ b)\times(c,\ d)=(ac-bd,\ ad+bc)$$

の定義を得る．よって，複素数を視覚的に定義できたのである．

5

初等関数に複素変数を導入したのは Euler であったが，微積分法の発展にともない複素変数の上に関数論を建設したのが A. L. Cauchy (1789-1857) である．複素数をどのように考えていたのだろうか．

彼は実数係数の整式をもとに複素数を定義した．すなわちxの整式$f(x)$を x^2+1 で割った同じ余りの集合，x^2+1 を法とする剰余類を考える．すると整式の集合はxの1次式 $a+bx$ の剰余類に分類される．そして剰余類の集合が体をなすこと剰余類体になることがわかる．加法と乗法は

$$(a+bx)+(c+dx)\equiv(a+c)+(b+d)x$$

$$\begin{aligned}(a+bx)(c+dx)&\equiv ac+(ad+bc)x+bdx^2\\&\equiv(ac-bd)+(ad+bc)x\end{aligned}$$

で交換可能で結合法則，分配法則が成り立つことは整式の計算からわかる．加法，乗法それぞれの単位元は0と1である．$a+bx$ で減法の逆元は $-a-bx$，乗法の逆元は

$$(a+bx)(a-bx)=a^2-b^2x^2\equiv a^2+b^2$$

であるから $\dfrac{a-bx}{a^2+b^2}$ となる．$c+dx$ がゼロ元でないとき除法 $(a+bx)\div(c+dx)$ は

$$\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}x$$

である．$a+0x=a$ のものだけを考えると実数と同じ四則演算に従い，この剰余類体が実数の拡大体となっていることがわかる．

x^2+1 を法とする整式xの剰余類をiで表せば x^2+1 の剰余類は i^2+1 と書けて，0である．$a+bx=a+bi$, $i^2=-1$ であり，今までの複素数の計算と同じものである．

一般にxの2次式 $px^2+qx+r\,(p\neq0)$ を法とする実係数の整式$f(x)$の剰余類はxの1次式になるが，剰余類の集合で和と積は

$$(ax+b)+(cx+d)=(a+c)x+b+d$$

$$(ax+b)(cx+d)=(ad+bc-acm)x+bd-acn$$

となる．ここで $m=\dfrac{q}{p}$, $n=\dfrac{r}{p}$ である．

任意の剰余類 $(ax+b)$ の逆元は

$$(ax+b)^{-1}=\frac{-ax-am+b}{a^2n-abm+b^2}$$

であるが，$m^2-4n<0$ のときに限り $0\ (a=b=0)$ でない元に逆元が存在し剰余類の集合は体となる．このとき

$$i=\frac{2x+m}{\sqrt{4n-m^2}}$$

とおけば，x^2+mx+n の剰余類は0であるから $(2x+m)^2$ の剰余類は m^2-4n となり，$i^2=-1$ で

である．剰余類での演算を書き直せば

$$(ai+b)+(ci+d)=(a+c)i+b+d$$
$$(ai+b)(ci+d)=(ad+bc)i+bd-ac$$
$$(ai+b)^{-1}=\frac{-ai+b}{a^2+b^2} \qquad (a,\ b\neq 0)$$

となることがわかる．

6

行列の概念はSylvester(1814-1897)によって与えられたが，行列式は連立1次方程式の一般解法を起源としてそれ以前からあった．例えば，次の行列式の計算を行って

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}=(x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$$

最初に書いた因数分解の公式が得られる．

行列の演算はCayley(1821-1895)によって考えられた．これは1次変換に関連して作りあげたものである．そして彼は，行列による複素数の定義や，更にHamiltonの発見した四元数の行列表示も行っている．

複素数の積の計算

$$(a+bi)(x+yi)=c+di$$

で $ax-by=c$, $ay+bx=d$ であるから

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

である．$a+bi$ が極座標$[r,\ \theta]$で表され，特に $r=1$ のときは $a=\cos\theta$, $b=\sin\theta$ であり，この複素数を掛けることによって点の回転移動

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

の式になる．また，上式で i を掛けて

$$(a+bi)(-y+xi)=-d+ci$$

となり $-ay-bx=-d$, $ax-by=c$ で

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -d \\ c \end{pmatrix}$$

である．これと先の式とにより

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

が成り立ち，$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$の型の実数行列によって複素数の表示の可能性が考えられる．

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと，Eは単位行列であり，$I^2=-E$ が成り立つ．ここで，この型の行列はすべて E，I により

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=aE+bI$$

と表すことができる．行列には和，積も定義されていて結合法則，分配法則も成り立つ．この型の行列は交換可能であり，単位元Eとゼロ元である零行列Oをもつ．更にOでない任意の行列は逆行列

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

ももつ．したがって，この型の行列は体をなすことがわかる．

行列の計算により加法，乗法，除法は

$$(aE+bI)+(cE+dI)$$
$$=(a+c)E+(b+d)I$$
$$(aE+bI)(cE+dI)$$
$$=(ac-bd)E+(ad+bc)I$$
$$(aE+bI)\div(cE+dI)$$
$$=(aE+bI)(cE+dI)^{-1}$$
$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}E+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}I$$

である．ただし除法では $cE+dI\neq O$ とする．複素数の演算と同じであり行列 $aE+bI$ は複素数 $a+bi$ と同一視できる．ここで行列Iは虚数単位 i に対応する．

複素数 α, β に対応する行列を A, B とすると共役複素数 $\overline{\alpha}$ に対応する行列は転置行列 ${}^tA$ である．このとき

$$|A|A^{-1}={}^tA,\ (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}=A^{-1}B^{-1}$$

であるから

$$|AB|=|A||B|,\ |AB^{-1}|=|A|/|B|$$
$$A{}^tA=|A|,\ {}^t(A\pm B)={}^tA\pm{}^tB$$
$${}^t(AB)={}^tA{}^tB,\ {}^t(AB^{-1})={}^tA({}^tB)^{-1}$$

が成り立つことがわかる．これは α, β では

$$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|,\ |\alpha/\beta|=|\alpha|/|\beta|$$
$$\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|,\ \overline{\alpha\pm\beta}=\overline{\alpha}\pm\overline{\beta}$$
$$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\,\overline{\beta},\ \overline{\alpha/\beta}=\overline{\alpha}/\overline{\beta}$$

が成り立つことに対応する．ここで$|A|$, $|\alpha|$ はそれぞれAの行列式，α の絶対値である．共役複素数への写像で複素数の四則演算が保存されるという性質を表している．

行列 $J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ を平方しても $J^2=-E$ になる．その他にも $J=\begin{pmatrix} s & (-s^2-1)/t \\ t & -s \end{pmatrix}$ の形の行列

は $J^2=-E$ が成り立つ．このどれを使っても $aE+bJ$ の集合として複素数体と全く同じように同一視できる体が定義できる．

複素数の行列を用いることにより，同様な方法で複素数の拡大体を定義することはできない．例えば行列 $M=E+iI$ の中にはゼロ行列ではないが，逆元が存在しないものがある．環が定義されるだけである．

7

普通代数学では複素数体は5節のように整式の剰余類体で定義される．すなわち x^2 を x^2+1 で割った余りは -1 である．x の剰余類は x でこれを記号 i で書けば当然 $x=i$ であり，したがって $i^2=-1$ である．このことを不思議がるのは，5を法とする整数の剰余類体

$$Z_5=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$$

において $2^2+1=0$, $3^2+1=0$ を不思議に思うことと同じである．ただCとの違いはCが実数体Rの拡大体となっているが，有理数体Qの部分体に Z_5 がなっていないことである．

なお x^2+1 を法とする剰余類の計算は

$$f(x)=(x^2+1)Q(x)+ax+b$$

と書けるから整式 $f(x)$ で $x^2=-1$ とおけば $f(x)$ の剰余類 $ax+b$ を得る．それゆえ剰余類は，整式の計算において逐次 $x^2=-1$ として行えばよい．このことから複素数の計算では i の整式と考えて計算ができ $i^2=-1$ とすればよいことになる．

x の $n(\geqq 3)$ 次式を法とする整式 $f(x)$ の剰余類により多元数で体を作ろうとしても体にはならない．代数学の基本定理により n 次式は1次または2次の整式の積に因数分解され可約だからである．

例えば x^3+1 を法とする整式の剰余類は x の2次式で

$$(ax^2+bx+c)+(dx^2+ex+f)$$
$$=(a+d)x^2+(b+e)x+(c+f)$$
$$(ax^2+bx+c)(dx^2+ex+f)$$
$$\equiv(af+eb+dc)x^2$$
$$+(bf+ec-ad)x+(cf-ae-bd)$$

と和と積がなるが，$x=j$, $x^2=k$ とおいて，$j^2=k$, $jk=-1$, $k^2=-j$ となる3元数

$ak+bj+c$ が定義できそうである．しかし $a+c=b$ のとき逆元をもたない．したがって数体にはならず環が定義されるのみである．

このように可約な多項式を法としても剰余類体にはならない．複素数を係数とする x の整式 $f(x)$ の剰余類体で複素数の拡大体を作ることもできない．なぜなら複素数を係数とする多項式は1次式の積に因数分解され，2次以上の式はすべて可約である．よって，1次式を法としたときに限り剰余類体となるが，それは複素数体である．

虚数は Descartes の命名であるが，身近なものにしたいものである．複素数平面での表示からうなずけることであるが，Gauss は正数，負数，虚数をそれぞれ“正面数”，“背面数”，“側面数”と呼んでおけばよかったといったといわれる．

数学者は微積分での計算を複素数体にまで拡張し，19世紀には輝かしい複素関数論を築き上げた．そして20世紀の現代解析学では“超関数”があたかも実数の拡張としての複素数を思わせる．どちらも厳密に定義されるとわかりにくいものである．

(参考文献)
[1] 「カジョリ初等数学史」小倉金之助訳(共立)1970
[2] 「解析概論」高木貞治(岩波)1961
[3] 「初等代数学」成田正夫(共立)1966
[4] 「線形代数学」佐武一郎(裳華房)1958
[5] 「数学辞典」日本数学会(岩波)1954

(東京都立 鷺宮高等学校)