大学入試の背景を探る

宮川(みやかわ)　幸隆(ゆきたか)

0. はじめに(今年度の行列・1次変換は面白い)

1992年の大学入試問題の行列・1次変換分野は大変興味深い難問が犇(ひし)めき合いました．平成6年度以降，高校の数学の教育課程から1次変換が姿を消しますが，まるで，ろうそくの火が消える時の輝きにも似た意欲的な問題が目立ちました．この傾向は1次変換がなくなるまで続くかも知れません．

1. 準備(固有値・固有ベクトル)

Aを実数を成分とする2次の正方行列とするとき，

(PR)　$A\vec{x}=\lambda\vec{x}$ かつ $\vec{x}\neq\vec{0}$

を満たす2次元列ベクトル$\vec{x}$(成分は実数であるとする)が存在するような実数λのことを，Aの(実)**固有値**と呼び，$\vec{x}$をλに属する(Aの)(実)**固有ベクトル**と呼びます．

$$A\vec{x}=\lambda\vec{x}\iff(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$$

(Eは2次の単位行列)

であるから，

$$\begin{aligned}&(PR)\text{を満たす}\vec{x}\text{が存在する}\\ \iff&\det(A-\lambda E)=0\\ \iff&\lambda^2-(a+d)\lambda+ad-bc=0\end{aligned}$$

［ただし，$\det(A-\lambda E)$ は $A-\lambda E$ の行列式であり，$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ とする］

となり，Aの固有値は $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ の**固有方程式**

$$t^2-(a+d)t+ad-bc=0 \quad\cdots\cdots ①$$

の(実数)解で，逆も成り立ちます．

①の虚数解はAの(虚)固有値と呼ばれ，①が虚数解をもつときはAの実固有値は存在しません．更にこのとき，実固有ベクトルも存在しません．

実と虚の固有値を合わせて複素固有値と呼び，虚固有値には(虚)固有ベクトルが属します．

定理1　Aが相異なる2つの複素固有値λ_1，λ_2をもつならば，λ_iに属するAの固有ベクトルを$\vec{x_i}$($i=1$，2)とするとき，$\vec{x_1}$と$\vec{x_2}$とは互いに1次独立である．

定理2　Aがスカラー行列でないならば，Aの同じ固有値に属する固有ベクトルは互いに1次従属である．

Aがスカラー行列kEであるならば，Aの固有方程式は，$t^2-2kt+k^2=0$ となるので，Aはただ1つの固有値k(重解)しかもたず，Aが相異なる2つの実固有値をもつならば，Aはスカラー行列ではありません．よって，この場合は，定理1と定理2とから，相異2実固有値λ_1，λ_2のそれぞれに属する固有ベクトルの方向(逆向きも含む)が1つずつ定まります．

Aがスカラー行列でなくても，Aがただ1つの固有値(重解)しかもたないことはあります．①の判別式をDとすると，

$$\begin{aligned}D&=(a+d)^2-4(ad-bc)\\&=(a-d)^2+4bc\end{aligned}$$

ですから，例えば，$A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$ はただ1つの固有値しかもちません．

以上によって，任意の行列Aは次の4つのタイプのどれかになっていることがわかります．

i)　相異なる2つの実固有値をもち，それぞれの固有値に属する固有ベクトルの方向(逆向きも含む)が1つずつ定まる．

ii)　$A=kE$(スカラー行列)　$\vec{0}$以外のすべてのベクトル$\vec{x}$がAのkに属する固有ベクトルである〔kはAのただ1つの固有値(重解)である〕．

iii)　Aはスカラー行列でなく，ただ1つの固有値(重解)をもち，それに属する固有ベクトルの方向

(逆向きも含む)が，ただ1つに定まる．
(iv) 実固有値をもたない．

2. 準備(1次変換による不動直線と固有値・固有ベクトルとの関連)

行列Aの表す1次変換をfとする．

Aが1のi)のタイプの行列のとき，

a) **0がAの固有値でないならばfによる原点を通る不動直線は2本だけ存在する．**

b) **0がAの固有値ならば，fによる原点を通る不動直線は1本だけ存在し，**このとき，$\det A=0$，すなわち，A^{-1}が存在しないから，**原点を通らない不動直線は存在しない．**

Aが1のii)のタイプの行列のとき，

c) **$k=0$** ならば，fによる**不動直線は存在しない．**

d) **$k=1$** ならば，**すべての直線がfによって**不動である．

e) **$k\neq0$ かつ $k\neq1$** ならば，**原点を通るすべての直線達のみがfによって不動．**

Aが1のiii)のタイプの行列のとき，

f) **0がAの固有値でないならばfによる原点を通る不動直線は1本だけ存在する．**

g) **0がAの固有値ならば，fによる原点を通る不動直線は存在せず，**このとき，$\det A=0$ すなわち，A^{-1}が存在しないから，**原点を通らない不動直線も存在しない．**

さて，fによる不動直線の方向ベクトル$\vec{v}$はfによって，それと平行なベクトル$A\vec{v}$に移されますから，$\vec{v}$はAの実固有ベクトルとなります．よって，

Aが1のiv)のタイプの行列のときは，

fによる**不動直線は存在しない．**

[∵Aが1のiv)のタイプのときは，Aの実固有ベクトルは存在しないから．]

以上の不動直線の分類では，まだ原点を通らない不動直線に対しては追求不足です．そこで以下では，原点を通らない不動直線に関する定理を次々に列挙することにしましょう．

> **定理3** “行列Aの表す1次変換による原点を通らない不動直線が存在する”…… ①
> $\Longleftrightarrow \det A\neq0$ かつ “1がAの固有値”

この証明には，**転置行列**という概念の導入と，それについての性質のまとめとをしておく必要があります．

一般の行列Xに対して，Xの行と列を入れ替えた行列を${}^tX$と表すことにし，Xの**転置行列**と呼びます．このとき，

$${}^t(XY)={}^tY{}^tX$$

$\det X\neq0$ のとき ${}^t(X^{-1})=({}^tX)^{-1}$

が成り立ちます．

> **定理4** 1次変換fを表す行列Aが固有値1，α ($\alpha\neq0$，$\alpha\neq1$)をもつとき，$A\vec{p}=\vec{p}$，$A\vec{q}=\alpha\vec{q}$ ($\vec{p}\neq\vec{0}$，$\vec{q}\neq\vec{0}$) とすると，fによる不動直線は，
> Ⓐ 原点を通り，$\vec{p}$を方向ベクトルとする直線，
> Ⓑ $\vec{q}$を方向ベクトルとする直線すべて　となる．

> **定理5** 1次変換fを表す行列Aが固有値1(重解)をもち，$A\neq E$ であるとき，$A\vec{p}=\vec{p}$ ($\vec{p}\neq\vec{0}$)とすると，fによる不動直線は，
> Ⓐ $\vec{p}$を方向ベクトルとする直線すべて
> となる．

さて，上の「不動直線の分類」では，*a*)と*f*)のときだけが追求不足でしたが，*a*)に対しては，

a') **Aが固有値1，α ($\alpha\neq0$，$\alpha\neq1$)をもつ**ならば，fによる**不動直線は定理4の通り**である．

a'') **Aが固有値α，β ($\alpha\neq\beta$，$\alpha\neq0$，$\beta\neq0$，$\alpha\neq1$，$\beta\neq1$)をもつ**ならば，定理3により，fによる**原点を通らない不動直線は存在せず，不動直線は原点を通るもの2本**だけである．

f)に対しては，

f') **Aが固有値1(重解)をもつ**ならば，fによる**不動直線は定理5の通り**である．

f'') **Aが固有値α ($\alpha\neq0$，$\alpha\neq1$)をもつ**ならば，定理3により，fによる**原点を通らない不動直線は存在せず，不動直線は原点を通るもの1本**だけ**である．**

のように，「分類」が完成されます．

3. 任意行列を対称行列へ

まず，東北大(前期…理系)の次の問題を，背景を探りながら解いてみましょう；

> 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ について
> (1) 等式 $AB=BA$ が成り立つとき，Aの成分の間にはどのような関係があるか．
> (2) 省略．

この問題では $B={}^tA$, $A={}^tB$ となっています．${}^tX=X$ を満たす行列Xを**対称行列**と呼びます．すなわち

$$\begin{pmatrix} a & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b} & c \end{pmatrix}$$

の形の行列が対称行列です．任意の行列Xに対して ${}^tXX$ は対称行列です(成分計算で簡単に確かめられる)．すなわち，

行列Xを ${}^tXX$ へ対応させる写像は，
任意行列を対称行列へ対応させる写像

です．

また明らかに，Xと ${}^tX$ とは共通の固有値をもつから上の問題に戻って，

解　AとBとは共通の固有値 α, β をもつ．

(I)　$\alpha\neq\beta$ のとき

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix},$$

$$B\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},\ B\begin{pmatrix} z' \\ w' \end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix} z' \\ w' \end{pmatrix}$$

とする．

$BA\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\alpha B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=AB\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ から $B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

または $B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は α に属するAの固有ベクトルである．Aはスカラー行列でないから定理2により

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

同様にして，　$B\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$

よって，s, t はBの固有値で $s\neq t$ である．なぜならば $s=t$ とすると定理2により $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}/\!/\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ となるが，一方，$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ と定理1により $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\not\parallel\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ であるからである．

ゆえに $(s,\ t)=(\alpha,\ \beta)$, $(\beta,\ \alpha)$

(イ)　$(s,\ t)=(\alpha,\ \beta)$ のとき

$$BA\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\alpha\beta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\alpha s\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\alpha^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$BA\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}=\beta B\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}=\beta t\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}=\beta^2\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$$

$\alpha^2=\beta^2$ のとき，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\not\parallel\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ により $BA=\alpha^2E$

$BA=\begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$ であるから，

$\alpha=0$ のときは

$a^2+c^2=b^2+d^2=0$

ゆえに　$a=b=c=d=0$ …… ①

$\alpha\neq0$ のときは $\alpha^{-2}BA=E$

よって

$$B=\alpha^2A^{-1}=\frac{\alpha^2}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$\dfrac{\alpha^2}{ad-bc}=k$ とおくと

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} kd & -kb \\ -kc & ka \end{pmatrix}$$

ゆえに　$a=k^2a$, $b=k^2b$

よって $k=\pm1$, $(a,\ b)=(0,\ 0)$

$(a,\ b)=(0,\ 0)$ のときは ①

$k=1$ のときは，$a=d$, $b=-c$ …… ②

$k=-1$ のときは，$a=-d$, $b=c$ …… ③

$\alpha^2\neq\beta^2$ のとき，α^2, β^2 は対称行列 BA の相異なる固有値であるから，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$

よってAは対称行列，すなわち $b=c$ … ④である．

∵ 次の2つの定理による．

定理6　λ_1, λ_2 **が対称行列Aの相異なる固有値であるとき，λ_i に属する A の固有ベクトルを $\overrightarrow{x_i}$ $(i=1,\ 2)$とすると，常に $\overrightarrow{x_1}\perp\overrightarrow{x_2}$ である．**

証明　2次元の列ベクトル $\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ や行ベクトル$(x,\ y)$も行列の仲間なので ${}^t\vec{x}=(x,\ y)$, ${}^t(x,\ y)=\vec{x}$ となり，更に，${}^t(A\vec{x})={}^t\vec{x}\,{}^tA$ が成り立ち，2つのベクトル$\vec{x}$, $\vec{y}$ の内積は ${}^t\vec{x}\vec{y}$ と表される．

さて，$\lambda_1{}^t\overrightarrow{x_1}\overrightarrow{x_2}={}^t(\lambda_1\overrightarrow{x_1})\overrightarrow{x_2}={}^t(A\overrightarrow{x_1})\overrightarrow{x_2}$
$={}^t\overrightarrow{x_1}{}^tA\overrightarrow{x_2}={}^t\overrightarrow{x_1}A\overrightarrow{x_2}={}^t\overrightarrow{x_1}(\lambda_2\overrightarrow{x_2})$
$=\lambda_2{}^t\overrightarrow{x_1}\overrightarrow{x_2}$

よって，$\lambda_1\neq\lambda_2$ とから，${}^t\overrightarrow{x_1}\overrightarrow{x_2}=0$ ▩

定理7　**行列Aが直交する固有ベクトル $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{x_2}$ をもてばAは対称行列である．**

証明　$A\overrightarrow{x_i}=\lambda_i\overrightarrow{x_i}\,(i=1,\ 2)$ とする．
$\lambda_1{}^t\overrightarrow{x_1}\,\overrightarrow{x_2}=\lambda_2\ {}^t\overrightarrow{x_1}\,\overrightarrow{x_2}$ より ${}^t(A\overrightarrow{x_1})\overrightarrow{x_2}={}^t\overrightarrow{x_1}(A\overrightarrow{x_2})$
ゆえに ${}^t\overrightarrow{x_1}{}^tA\overrightarrow{x_2}={}^t\overrightarrow{x_1}A\overrightarrow{x_2}$
一方，${}^t\overrightarrow{x_2}{}^tA\overrightarrow{x_2}={}^t(A\overrightarrow{x_2})\overrightarrow{x_2}=\lambda_2{}^t\overrightarrow{x_2}\,\overrightarrow{x_2}={}^t\overrightarrow{x_2}A\overrightarrow{x_2}$
よって $\begin{pmatrix}{}^t\overrightarrow{x_1}\\ {}^t\overrightarrow{x_2}\end{pmatrix}{}^tA\overrightarrow{x_2}=\begin{pmatrix}{}^t\overrightarrow{x_1}\\ {}^t\overrightarrow{x_2}\end{pmatrix}A\overrightarrow{x_2}$
ゆえに ${}^tA\overrightarrow{x_2}=A\overrightarrow{x_2}$
同様に ${}^tA_2\overrightarrow{x_1}=A\overrightarrow{x_1}$　よって ${}^tA=A$　▨

(ロ)　$(s,\ t)=(\beta,\ \alpha)$ のとき

$BA\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\alpha\beta\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，$BA\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}=\alpha\beta\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}$

ゆえに $BA=\alpha\beta E$　$\alpha\beta=0$ のときは ①，$\alpha\beta\neq 0$ のときは，① または ② または ③．

(II)　$\alpha=\beta$ のとき

$A=\alpha E$ のときは，$a=d$，$b=c(=0)$ …… ⑤
$A\neq\alpha E$ のときは，$B\neq\alpha E$　このとき，

$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，$B\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}$ とすると，

$AB\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}=\alpha A\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}=BA\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}$

ゆえに $A\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

または $A\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}$ は α に属する B の固有ベクトルであるから，定理 2 により，$A\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}$

ゆえに $k=\alpha$

よって，定理 2 により，$\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}=l\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$　$(l\neq 0)$

ゆえに α に属する A の固有ベクトルと B の固有ベクトルとは平行である．

ゆえに $\begin{cases}(a-\alpha,\ b)/\!/(a-\alpha,\ c)\\(c,\ d-\alpha)/\!/(b,\ d-\alpha)\end{cases}$

よって，$a\neq\alpha$ または $d\neq\alpha$ のときは $b=c$ … ④
$a=d=\alpha$ のときは $A\neq\alpha E$ により $b\neq 0$ or $c\neq 0$
$b\neq 0$ のときは固有ベクトルは $(x,\ 0)$ の形かつ $(0,\ y)$ の形でなくてはならないが，これは矛盾である．
$c\neq 0$ のときも同様にして矛盾が導かれる．
①，⑤ は ②，④ に含まれ，③ は ④ に含まれるから，答は ② または ④ である．　▨

定理 7 を背景にもつ 92 年度の入試問題をもう 1 題紹介しましょう；

(1)　行列 $\begin{pmatrix}k+1 & 1\\ k & k-1\end{pmatrix}$ で表される 1 次変換を f とする．原点を通る直線で，f によりそれ自身に移る直線が 2 本あるための k の条件を求めよ．
(2)　(1)における 2 本の直線が直交するとき，それらの直線を求めよ．　（熊本大・教育）

(2)においては，行列 $\begin{pmatrix}k+1 & 1\\ k & k-1\end{pmatrix}$ が直交する 2 つの固有ベクトルをもつということですから，この行列は定理 7 により対称行列，すなわち，$k=1$ となるわけです．

更に，92 年度の入試問題の中に，対称行列を背景にもつ，とてつもない難問が現れました；

(1)　省略．
(2)　1 次変換 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ で，xy 平面上の任意の相異なる 2 点を移すとき，移す前と後で 2 点間の距離が変わるようにしたい．そのために，a，b，c，d が満たすべき条件を
$\alpha=ad-bc$ と $\beta=a^2+b^2+c^2+d^2$
を用いて表せ．　（千葉大）

解説　${}^t\vec{x}({}^tAA-E)\vec{x}\neq 0$ がすべての $\vec{x}(\neq\vec{0})$ に対して成り立つ条件を α と β を用いて表せばよい(なぜか？)．さて，${}^tAA-E$ は対称行列であるから，実数の固有値 k_1，k_2 をもつ(なぜか？)．そして，k_i に属する ${}^tAA-E(=B$ とおく$)$の固有単位ベクトルを $\overrightarrow{e_i}$ とすると，

$$B\overrightarrow{e_i}=k_i\overrightarrow{e_i}\,(i=1,\ 2)$$

いま，$\vec{f}\perp\overrightarrow{e_1}$ なる単位ベクトル $\vec{f}$ を考えると，

$$\begin{pmatrix}{}^t\overrightarrow{e_1}\\ {}^t\vec{f}\end{pmatrix}(\overrightarrow{e_1}\ \vec{f})=E \qquad \text{であり，}$$

$$\begin{pmatrix}{}^t\overrightarrow{e_1}\\ {}^t\vec{f}\end{pmatrix}B(\overrightarrow{e_1}\ \ \vec{f})=\begin{pmatrix}{}^t\overrightarrow{e_1}\\ {}^t\vec{f}\end{pmatrix}(B\overrightarrow{e_1}\ \ B\vec{f})$$
$$=\begin{pmatrix}{}^t\overrightarrow{e_1}B\overrightarrow{e_1} & {}^t\overrightarrow{e_1}B\vec{f}\\ {}^t\vec{f}B\overrightarrow{e_1} & {}^t\vec{f}B\vec{f}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1 & {}^t(B\overrightarrow{e_1})\vec{f}\\ {}^tf(k_1\overrightarrow{e_1}) & {}^t\vec{f}B\vec{f}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}k_1 & {}^t(k_1\overrightarrow{e_1})\vec{f}\\ 0 & {}^t\vec{f}B\vec{f}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1 & 0\\ 0 & {}^t\vec{f}B\vec{f}\end{pmatrix}$$

よって，k_1，${}^t\vec{f}B\vec{f}$ は $\begin{pmatrix}{}^t\overrightarrow{e_1}\\ {}^t\vec{f}\end{pmatrix}B(\overrightarrow{e_1}\,\vec{f})$ の固有値であり，それは B の固有値と一致するから，

$${}^t\vec{f}B\vec{f}=k_2$$

以上によって，${}^t\vec{x}({}^tAA-E)\vec{x}={}^t\vec{x}B\vec{x}$

$$={}^t\vec{x}(\vec{e_1}\,\vec{f})\begin{pmatrix}{}^t\vec{e_1}\\{}^t\vec{f}\end{pmatrix}B(\vec{e_1}\quad\vec{f})\begin{pmatrix}{}^t\vec{e_1}\\{}^t\vec{f}\end{pmatrix}\vec{x}$$

$$={}^ty\begin{pmatrix}k_1&0\\0&k_2\end{pmatrix}\vec{y}\qquad\left(ただし，\vec{y}=\begin{pmatrix}{}^t\vec{e_1}\\{}^t\vec{f}\end{pmatrix}\vec{x}\right)$$

よって，求める条件は

${}^ty\begin{pmatrix}k_1&0\\0&k_2\end{pmatrix}\vec{y}\neq0$ がすべての $\vec{y}(\neq\vec{0})$ に対して成り立つことと同値で，その条件は $k_1k_2>0$．なぜならば，もし $k_1k_2\leqq0$ とすると，$k_1=0$ or $k_2=0$ or $k_1k_2<0$ であるが，$k_1=0$ のときは

${}^t\vec{e_1}B\vec{e_1}={}^t\vec{e_1}k_1\vec{e_1}=0$ となって，

${}^t\vec{x}({}^tAA-E)\vec{x}\neq0$ がすべての $\vec{x}(\neq\vec{0})$ に対して成り立つことに反する．$k_2=0$ のときも同様．$k_1k_2<0$ のときは

$$(y\quad1)\begin{pmatrix}k_1&0\\0&k_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\1\end{pmatrix}=k_1y^2+k_2=0$$

を満たす y として $y=\pm\sqrt{\dfrac{-k_2}{k_1}}$ が存在するから，

${}^t\vec{y}\begin{pmatrix}k_1&0\\0&k_2\end{pmatrix}\vec{y}\neq0$ がすべての $\vec{y}(\neq\vec{0})$ に対して成り立つことに反する．よって，解と係数の関係により，求める条件は ${}^tAA-E$ の行列式が正であること，すなわち，$(a^2+c^2-1)(b^2+d^2-1)-(ab+cd)^2>0$

ゆえに $\alpha^2-\beta+1>0$

さて，前頁の最後に，行列の自由な演算を紹介しましたが，このように行列の演算では分解や融合が自由に行えるのです．次には，行列のこの自由な演算を背景にもつ 92 年度の入試問題を紹介します；

4. 行列は自由だ／

> $A=\begin{pmatrix}3&2\\-2&-1\end{pmatrix}$ とする．条件 $ad-bc=1$，$a>0$ を満たす整数 a，b，c，d を成分とする行列 $P=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ を適当に選ぶとき
>
> $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}$ が成り立つ．このとき
>
> (1) x，y を求めよ．
>
> (2) 省略．　　　　　　　　(早稲田大・理工)

解 $\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}=\vec{p}$，$\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}=\vec{q}$ とおく．

$AP=P\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}$ により $A(\vec{p}\,\vec{q})=(\vec{p}\,\vec{q})\begin{pmatrix}x&y\\0&x\end{pmatrix}$

ゆえに $A\vec{p}=x\vec{p}$ $a>0$ により $\vec{p}\neq\vec{0}$ であるから x は A の固有値である．

よって $(3-x)(-1-x)+4=0$　ゆえに $x=1$

次に $A\vec{q}=y\vec{p}+\vec{q}$ から

$$\begin{pmatrix}3&2\\-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}$$

ゆえに $y\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\d\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}b+d\\-(b+d)\end{pmatrix}$

$y=0$ とすると $P^{-1}AP=xE=E$　よって $A=E$

これは矛盾．よって $y\neq0$ であり，

$$\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}=\frac{2}{y}\begin{pmatrix}b+d\\-(b+d)\end{pmatrix}$$

よって，$ad-bc=\dfrac{2}{y}(b+d)^2=a(b+d)=1$ と

$a>0$ と a，b，c，d；整数により $a=1$，$b+d=1$

ゆえに $\dfrac{2}{y}=1$　したがって $y=2$ ▨

> 行列 $A=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&p\\q&0\end{pmatrix}$，
>
> $C=\begin{pmatrix}r&0\\0&s\end{pmatrix}$ が関係式 $C=ABA^{-1}$ を満たすとき，p，q，r，s を求めよ．　(関西学院大・文)

解 $C=ABA^{-1}$ から $BA^{-1}=A^{-1}C$ ここで，

$A^{-1}=\dfrac{1}{-2+1}\begin{pmatrix}2&-1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\-1&1\end{pmatrix}$ であるから，

$B\left(\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)=\left(r\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}\quad s\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ よって，r，s は B の相異なる固有値であり［∵ B はスカラー行列でないから，定理 2 による］，2 次方程式

$\lambda^2-2\lambda-pq=0$ の 2 解である．

ゆえに $r+s=2$ …… ①，$rs=-pq$ …… ②

更に，$\begin{pmatrix}2&p\\q&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2r\\-r\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}2&p\\q&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s\\s\end{pmatrix}$

により $-2q=-r$ …… ③，$q=s$ …… ④

以下略．

5. 原点を通らない不動直線

次に，2 でせっかく「不動直線のすべて」についてまとめましたので，92 年度の入試問題の中から，これに関連のあるものを 1 題拾いましょう；

> l は平面上の原点Oを通らない定直線とし，A, B は l 上の相異なる 2 定点，P は l 上の動点

とする．また，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする．1次変換 f が $f(\vec{a})=\vec{b}$ と $f(\vec{b})=\vec{a}$ を満たす．

(1) ベクトル $f(\vec{p})+\vec{p}$ は一定であることを証明せよ．

(2) 省略．　　　　　　　(茨城大・前期・工)

解説 l は f による原点を通らない不動直線であるから，f を表す行列 A は固有値1をもつ[∵ 定理3]が，A は固有値1を重解にはもたない．なぜならば，もし A が固有値1を重解にもったとすると，

$$\mathrm{tr}(A)=2,\ \det(A)=1$$

ゆえに　$A^2=2A-E$

一方，$A^2\vec{a}=A\vec{b}=\vec{a}$，$A^2\vec{b}=A\vec{a}=\vec{b}$ で $\vec{a}$ と $\vec{b}$ とは互いに1次独立であるから，$A^2=E$

ゆえに　$2A=2E$　よって　$A=E$

となるが，これは $f(\vec{a})=\vec{b}$ に反する．

また線分ABの中点をMとし，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{m}$ とすると $\vec{m}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ で，$f(\vec{m})=\dfrac{f(\vec{a})+f(\vec{b})}{2}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}=\vec{m}$

であるから，定理4により，$f(\vec{p})+\vec{p}$ が一定であるならば，

$$f(f(\vec{p}))+f(\vec{p})=f(\vec{p})+\vec{p}$$

とから，

$$f(\vec{p})+\vec{p}=2\vec{m}$$

であるハズであるが，$p=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ とおくことにより，これは確かめられる．　▨

6．再び，固有値・固有ベクトル

以上で見てきたように，固有値・固有ベクトルは行列・1次変換の問題をスマートに解く上で強力な武器であることがおわかりだと思います．そこで，最後に，この武器を用いて，92年度の難問・良問をもう1題攻めてみましょう；

$A=\begin{pmatrix}2 & a\\ a & 1\end{pmatrix}$（$a$ は定数で，$a^2\neq 2$）とする．ただし，O は零行列，E は単位行列である．

(1) $AX+XA=O$ となる行列 X は，$AX=XA$ を満たすことを示せ．

(2) $AY+YA=E$ となる行列 Y を求めよ．

(東北学院大・工)

解 (1) A の固有値は $(2-\lambda)(1-\lambda)-a^2=0$

すなわち $\lambda^2-3\lambda+2-a^2=0$ の2解であり，

$D=9-4(2-a^2)>0$ であるから，A は相異なる2つの実固有値 α，β をもつ．

いま，$2-a^2\neq 0$ であるから，$\alpha\neq 0$，$\beta\neq 0$ である．

α，β に属する A の固有ベクトルをそれぞれ $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}$ とすると，$\alpha\neq\beta$ により $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}$

[∵ 定理1]

$AX+XA=O$ により，$AX=-XA$ …… ①

いま，$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ であるから，①により

$$AX\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-\alpha X\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\ \cdots\cdots\ ②$$

いま，$X\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ とすると，$X\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ は A の固有値 $-\alpha$ に属する固有ベクトルとなるから，

$$-\alpha=\beta\quad[∵\ \alpha\neq 0]$$

ゆえに $\alpha+\beta=0$ ところが，解と係数の関係により，$\alpha+\beta=3$ であるから，これは矛盾．よって

$$X\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

同様にして，$X\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$　よって，

$$X=O\ \left[∵\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\not\parallel\begin{pmatrix}z\\w\end{pmatrix}\right]$$

ゆえに $AX=XA(=O)$

(2) $AY+YA=E$ から，

$$A\left(Y-\frac{1}{2}A^{-1}\right)+\left(Y-\frac{1}{2}A^{-1}\right)A=O$$

よって，(1)の経過により $Y-\dfrac{1}{2}A^{-1}=O$　▨

（参考文献）

1．福井，上村，入江，宮寺，前原，境 共著，線型代数学入門，内田老鶴圃新社

2．拙著，雑誌「大学への数学」3-88 記事「任意行列を対称行列へ」，東京出版

（静岡県立 沼津東高等学校）