チェビシェフの多項式について

柳田（やなぎだ）　五夫（いつお）

1. Čebyšev〔Tschebyscheff〕の多項式

チェビシェフの多項式をここでは次のように定義する．

【0】 θ を変数とするとき $\cos n\theta$, $\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ は $\cos\theta$ の多項式として表される．すなわち，多項式 $T_n(x)$, $g_n(x)$ が存在して

$$\cos n\theta = T_n(\cos\theta),\quad \frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = g_n(\cos\theta) \tag{1}$$

と表すことができる．

(証明)

$$\cos n\theta = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos\theta - i\sin\theta)^n}{2}$$

$$= \cdots\cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} {}_n\mathrm{C}_{2k}(\cos\theta)^{n-2k}(\cos^2\theta - 1)^k$$

同様にして

$$\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} {}_n\mathrm{C}_{2k-1}(\cos\theta)^{n-(2k-1)}(\cos^2\theta - 1)^{k-1}$$

よって $\cos n\theta$, $\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}$ は $\cos\theta$ の多項式である．

▨

双曲線余弦 $\cosh\theta$ に対して，$T_n(\cosh\theta)$, $g_n(\cosh\theta)$ を考えると，$(\cosh\theta)^2 - (\sinh\theta)^2 = 1$ で $(\cosh\theta + \sinh\theta)^n = e^{n\theta}$, $(\cosh\theta - \sinh\theta)^n = e^{-n\theta}$ を満たすから，上の証明と同様にして

$$\cosh n\theta = T_n(\cosh\theta),$$

$$\sinh n\theta = \sinh\theta \cdot g_n(\cosh\theta) \tag{2}$$

が成り立つ．

(1)と加法定理を用いると，$\{T_n(x)\}$, $\{g_n(x)\}$ の漸化式が得られる．

【1】
$$\begin{cases} T_{n+1}(x) = xT_n(x) + (x^2-1)g_n(x) & (3) \\ g_{n+1}(x) = T_n(x) + x\,g_n(x) & (4) \end{cases}$$

$T_1(x) = x$, $g_1(x) = 1$ であるから(3), (4)を用いると $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $g_2(x) = 2x$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$, $g_3(x) = 4x^2 - 1$, $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$, ……

となる．

これらの式から，次の【2】,【2】′が予想できる．

【2】 $T_n(x)$ は n 次の多項式で，x^n の係数は 2^{n-1} である．また，$T_n(x)$ は n が偶数のとき偶関数で，n が奇数のとき奇関数である．(証明省略)

【2】′ $g_n(x)$ は $n-1$ 次の多項式で，x^{n-1} の係数は 2^{n-1} である．また，$g_n(x)$ は n が偶数のとき奇関数で，n が奇数のとき偶関数である．(証明省略)

$|x| \leqq 1$ のとき $x = \cos\theta$ とおくと不等式 $|T_n(x)| = |T_n(\cos\theta)| = |\cos n\theta| \leqq 1$ が成り立ち，$T_n(1) = 1$, $T_n(-1) = (-1)^n$ であるから次の等式を得る．

【3】 $\displaystyle\max_{-1 \leqq x \leqq 1} |T_n(x)| = 1$

$g_n(x)$ については $g_n(1) = n$, $g_n(-1) = (-1)^{n-1}n$ で，帰納法で $|\sin n\theta| \leqq n|\sin\theta|$ が示せるから，次の等式を得る．

【4】 $\displaystyle\max_{-1 \leqq x \leqq 1} |g_n(x)| = n$

方程式 $T_n(x) = 0$ と $g_n(x) = 0$ の解を求める．

まず，$-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲で $T_n(x) = 0$ の実数解を求める．

$x = \cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とおくと $T_n(x) = \cos n\theta = 0$ から

$$\theta = \frac{2k+1}{2n}\pi \quad よって\quad t_k = \cos\frac{2k+1}{2n}\pi$$

$(0 \leqq k \leqq n-1)$ とおくと t_k は $T_n(x) = 0$ の解で，$T_n(x)$ は n 次式であるから，方程式 $T_n(x) = 0$ はこれ以外の解をもたない．

【5】 方程式 $T_n(x) = 0$ の解は $t_k = \cos\dfrac{2k+1}{2n}\pi$ $(k = 0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n-1)$ である．

同様にして

【5】′ 方程式 $g_n(x) = 0$ の解は $g_k = \cos\dfrac{k}{n}\pi$ $(k = 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$ である．

$-1 < x < 1$ のとき $x = \cos\theta$ とおくと

$T_n(x)=\cos n\theta$ であるから

$$T_n'(x)=-n\sin n\theta\frac{d\theta}{dx}=n\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}=ng_n(x)$$

ゆえに　　$T'_n(x)=ng_n(x)$

これと【5】$'$から，$g_k=\cos\frac{k}{n}\pi$ $(1\leqq k\leqq n-1)$ は $T_n'(x)=0$ の解で，$x=g_k$ の前後で $g_n(x)$ すなわち $T_n'(x)$ の符号が変化することから，$x=g_k$ で $T_n(x)$ は極値 $T_n(g_k)=\cos k\pi=(-1)^k$ をとる．

【6】　$T_n(x)$ は $x=\cos\frac{k}{n}\pi$ $(k=1, 2, \cdots\cdots, n-1)$ で極値 $(-1)^k$ をとる．

2. チェビシェフの定理

【2】,【3】から $\displaystyle\max_{-1\leqq x\leqq 1}\left|\frac{T_n(x)}{2^{n-1}}\right|=\frac{1}{2^{n-1}}$ が成り立つが，一般に最高次の項が x^n である多項式について，次の定理が成り立つ．

> **定理1**　実数係数の多項式
> $p(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$ に対して
> $$\max_{-1\leqq x\leqq 1}|p(x)|\geqq\frac{1}{2^{n-1}} \qquad (5)$$
> が成り立つ．
> 等号は $p(x)\equiv\frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$ のときに限る．

(前半の証明)　(5)が成り立たないような $p(x)$ があったとする．【5】$'$における g_k について

$$T_n(g_k)=\cos k\pi=(-1)^k \quad (【6】参照)$$

から　$(-1)^k\left\{\frac{T_n(g_k)}{2^{n-1}}-p(g_k)\right\}$

$$=\frac{1}{2^{n-1}}-(-1)^kp(g_k)>0$$

となる．$q(x)=\frac{T_n(x)}{2^{n-1}}-p(x)$ とおくと，$q(x)$ は $n-1$ 次以下の多項式で，方程式 $q(x)=0$ は区間 (g_1, g_0), (g_2, g_1), $\cdots\cdots$, (g_n, g_{n-1}) で実数解をもつから，少なくとも n 個の解をもつことになり矛盾．よって，このような $p(x)$ は存在しない．▩

後半の証明については，例えば参考文献1の 43～46頁にある．

チェビシェフの定理に関連した問題は昔から多数大学入試に出題されている．

> 2次関数 $f(x)=x^2+ax+b$ に対して，$-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M で表す．このとき $M\geqq\frac{1}{2}$ が成り立つことを，関数 $g(x)=f(x)-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)$ を用いて背理法で証明せよ．　(S 60　早稲田大―政経)

> k を実数の定数とするとき，x の関数 $f(x)=|x^3-3kx|$ が $-1\leqq x\leqq 1$ の範囲でとる最大値を $M(k)$ で表す．k が実数全体を動くとき，$M(k)$ が最小となる k の値および $M(k)$ の最小値を求めよ．　(S 52　東京大2次)

> $f(x)=x^3-\frac{3}{4}x$ とする．
> (1)　$f(x)$ の区間$[-1,\ 1]$における最大値，最小値および，それらを与える x の値を求めよ．
> (2)　x^3 の係数が1である3次関数 $g(x)$ が区間 $[-1,\ 1]$ で $|g(x)|\leqq\frac{1}{4}$ を満たすとき，$g(x)-f(x)$ は恒等的に0であることを示せ．
> (S 59　筑波大)

区間$[-1,\ 1]$外のときには次の定理がある．

【7】　n 次以下の実数係数の多項式 $p(x)$ と $|x|\geqq 1$ なる任意の実数 x について，不等式

$$|p(x)|\leqq\left(\max_{-1\leqq t\leqq 1}|p(t)|\right)|T_n(x)|$$

が成り立つ．$p(x)\equiv\alpha T_n(x)$　(α は定数)ならば等号が成立するが，それ以外の場合には $|x|>1$ なら決して等号は成立しない．

(証明は参考文献2の 35～36頁参照)

この定理は東京大学で出題されている．

> 3次関数 $h(x)=px^3+qx^2+rx+s$ は，次の条件 (i), (ii) を満たすものとする．
> (i)　$h(1)=1$, $h(-1)=-1$
> (ii)　区間 $-1<x<1$ で極大値1，極小値 -1 をとる．このとき
> (1)　$h(x)$ を求めよ．
> (2)　3次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が区間 $-1<x<1$ で $-1<f(x)<1$ を満たすとき，$|x|>1$ なる任意の実数 x に対して不等式

$$|f(x)|<|h(x)|$$
が成立することを証明せよ．

(H 2　東京大一理)

3. 積分に関する不等式

定理 2　実数係数の多項式
$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$ に対して
$$\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx \geqq \frac{1}{2^{n-1}} \tag{6}$$
が成り立つ．

等号は $f(x)\equiv\dfrac{g_{n+1}(x)}{2^n}$ のときに限る．

(証明)　$g_k=\cos\dfrac{k}{n+1}\pi$ $(0\leqq k\leqq n+1)$ とおくと
【5】′から $g_k(1\leqq k\leqq n)$ は $g_{n+1}(x)=0$ の解である．
$g(x)=f(x)-\dfrac{g_{n+1}(x)}{2^n}$，$F(x)=|f(x)|-\left|\dfrac{g_{n+1}(x)}{2^n}\right|$
とおくと $g(x)$ は $n-1$ 次以下の多項式である．

$g_{n+1}(x)\geqq 0$ のとき $F(x)\geqq g(x)$

(等号は $f(x)\geqq 0$ のとき)

$g_{n+1}(x)\leqq 0$ のとき $F(x)\geqq -g(x)$

(等号は $f(x)\leqq 0$ のとき)

$n=2m$ (m は自然数) の場合

$[g_{2m+1},\ g_{2m}]$，$[g_{2m-1},\ g_{2m-2}]$，……，$[g_1,\ g_0]$ で $g_{2m+1}(x)\geqq 0$ となり $[g_{2m},\ g_{2m-1}]$，……，$[g_2,\ g_1]$ で $g_{2m+1}(x)\leqq 0$ となるから
$$\int_{g_{2m+1}}^{g_{2m}}F(x)dx\geqq\int_{g_{2m+1}}^{g_{2m}}g(x)dx,\ \cdots\cdots,$$
$$\int_{g_1}^{g_0}F(x)dx\geqq\int_{g_1}^{g_0}g(x)dx$$
$$\int_{g_{2m}}^{g_{2m-1}}F(x)dx\geqq-\int_{g_{2m}}^{g_{2m-1}}g(x)dx,\ \cdots\cdots,$$
$$\int_{g_2}^{g_1}F(x)dx\geqq-\int_{g_2}^{g_1}g(x)dx$$
が成り立つ．これらの不等式の辺々を加えると
$$\int_{-1}^{1}F(x)dx\geqq-\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k\int_{g_k}^{g_{k+1}}g(x)dx$$
ゆえに $\displaystyle\int_{-1}^{1}F(x)dx\geqq-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_{g_k}^{g_{k+1}}g(x)dx$

したがって
$$\int_{-1}^{1}|f(x)|\,dx$$
$$\geqq\int_{-1}^{1}\frac{|g_{n+1}(x)|}{2^n}dx-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_{g_k}^{g_{k+1}}g(x)dx$$
$x=\cos\theta$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とおくことにより計算して
$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{|g_{n+1}(x)|}{2^n}dx=\frac{1}{2^{n-1}}$ を得るから
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_{g_k}^{g_{k+1}}g(x)dx=0$ を示せばよい．

$h(x)=\displaystyle\int g(x)dx$ とおくと $h(x)$ は n 次以下の多項式となり，$h(x)$ に対して
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\{h(g_{k+1})-h(g_k)\}=0 \tag{7}$$
を示せばよい．(これは参考文献 3 の 31 番と同じであるので証明については 3 参照)

次に，定理 2 で等号が成り立つのは，
$[g_{2m+1},\ g_{2m}]$，……，$[g_1,\ g_0]$ で $f(x)\geqq 0$ となり，$[g_{2m},\ g_{2m-1}]$，……，$[g_2,\ g_1]$ で $f(x)\leqq 0$ となることであるから　$f(g_k)=0$　$(1\leqq k\leqq 2m)$ を得る．

これから　$f(x)\equiv\dfrac{g_{n+1}(x)}{2^n}$ となる．

($n=2m-1$ の場合も同様である．)　▩

⟶参考文献 4 の 59〜61 頁の証明と本質的には同じものである．

定理 2 に関連した問題はあまり出題されていないようである．

2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ が $-1\leqq\alpha\leqq\beta\leqq 1$ なる 2 実根 α，β をもつとき
$$\int_{-1}^{1}|x^2+ax+b|\,dx\geqq\frac{1}{2}$$
であることを証明せよ．また，等号が成立するときの a，b の値を求めよ．　(S 49　日大一医)

$f(x)=x^2+ax+b$ (a，b は実数) とする．

(1)　$I=\displaystyle\int_{-1}^{\alpha}f(x)dx-\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx+\int_{\beta}^{1}f(x)dx$ が a，b の値によらないように定数 α，β $(-1<\alpha<\beta<1)$ を求めよ．また，そのときの I の値を求めよ．

(2)　$J=\displaystyle\int_{-1}^{1}|f(x)|dx$ の最小値と，それを与える $f(x)$ を求めよ．　(参考文献 5)

4. ある不等式について

> 【8】 x_1, x_2, ……, x_n が実数のとき
> $$(x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2)\cos\frac{\pi}{n}$$
> $$\geqq x_1x_2+x_2x_3+\cdots\cdots+x_{n-1}x_n-x_nx_1 \qquad (8)$$
> が成り立つ．ただし，n は 3 以上の自然数とする．（参考文献 6）

これを証明するために次の補助定理を用意する．

> **補助定理** n 次対称行列 $A=(a_{ij})$ に対して
> $$A_k=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots\cdots a_{1k} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}\cdots\cdots a_{kk}\end{pmatrix}$$ とおけば
> (1) $A>0 \Longleftrightarrow |A_k|>0 \quad (1\leqq k\leqq n)$
> (2) $A\geqq 0 \Longrightarrow |A_k|\geqq 0 \quad (1\leqq k\leqq n)$

（補助定理の証明は例えば参考文献 7 の 163～164 頁参照）

$\lambda=\cos\theta\,(0<\theta<\pi)$ とおき，2 次形式

$$F(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n)=2\lambda x_1^2+2\lambda x_2^2+\cdots+2\lambda x_n^2$$
$$-2x_1x_2-2x_2x_3-\cdots\cdots-2x_{n-1}x_n+2x_nx_1$$

の係数行列を A とおくと，まず次のことがいえる．

【9】 $\cos\dfrac{\pi}{n}<\lambda<1$ のとき $A>0$

（証明） $1\leqq k\leqq n-1$ のとき k 次行列 A_k について

$$|A_k|=\begin{vmatrix} 2\lambda & -1 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2\lambda & -1 & -1 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2\lambda & -1 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ & & & & \cdots\cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & -1 & 2\lambda \end{vmatrix}$$

これを第 1 行で展開すると

$|A_k|=2\lambda|A_{k-1}|+|L|$ となる．$|L|$ を第 1 列で展開すると $|L|=-|A_{k-2}|$ となるから

$$|A_k|=2\lambda|A_{k-1}|-|A_{k-2}| \qquad (10)$$

$|A_1|=2\lambda=g_2(\lambda)$，$|A_2|=4\lambda^2-1=g_3(\lambda)$ で，
漸化式 $\boldsymbol{g_{n+2}(\lambda)-2\lambda g_{n+1}(\lambda)+g_n(\lambda)=0}$ を用いると

$$|A_k|=g_{k+1}(\lambda)=\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta} \qquad (11)$$

次に $|A_n|$ $(=|A|)$ についても同様にして

$$|A_n|=2\lambda|A_{n-1}|-2|A_{n-2}|+2 \qquad (12)$$

を得るから (11) を用いて計算すると

$$|A_n|=4\cos^2\frac{n\theta}{2} \qquad (13)$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{n}$ のとき (11), (13) から $|A_k|>0$ $(1\leqq k\leqq n)$ であるから，補助定理 (1) から $A>0$ となる． ▨

（【8】の証明 1）【9】より $\cos\dfrac{\pi}{n}<\lambda<1$ のとき

$A>0$ であるから

$$(x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2)\lambda$$
$$\geqq x_1x_2+x_2x_3+\cdots\cdots+x_{n-1}x_n-x_nx_1$$

が成り立つ．よって，この不等式で $\lambda\longrightarrow\cos\dfrac{\pi}{n}+0$ とすれば (8) の不等式を得る． ▨

$\lambda=\cos\dfrac{\pi}{n}$ の場合 $|A_k|>0$ $(1\leqq k\leqq n-2)$,

$|A_{n-1}|=0$, $|A_n|=0$ となるので補助定理 (1) の $\Longleftarrow$ の証明にならって $A\geqq 0$ が証明できる．

（【8】の証明 2） $|A_k|>0$ $(1\leqq k\leqq n-2)$ と補助定理 (1) から $A_{n-2}>0$ である．$n-2$ 行 1 列の行列 $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ を $\boldsymbol{b}_1={}^t(0\ 0\cdots\cdots-1)$, $\boldsymbol{b}_2={}^t(1\ 0\cdots\cdots0)$ とし，

$B=(\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2)$, $C=\begin{pmatrix} 2\lambda & -1 \\ -1 & 2\lambda \end{pmatrix}$ とおくと

$A=\begin{pmatrix} A_{n-2} & B \\ {}^tB & C \end{pmatrix}$ となる．

$|A_{n-2}|>0$ より A_{n-2} は逆行列をもつから，

$P=\begin{pmatrix} E_{n-2} & A_{n-2}^{-1}B \\ {}^tO_{n-2,2} & E_2 \end{pmatrix}$ とおくと簡単な計算から

$${}^tP\begin{pmatrix} A_{n-2} & O_{n-2,2} \\ {}^tO_{n-2,2} & C-{}^tBA_{n-2}^{-1}B \end{pmatrix}P=A,$$

$${}^tP_{n-1}\begin{pmatrix} A_{n-2} & O_{n-2,1} \\ {}^tO_{n-2,1} & 2\lambda-{}^t\boldsymbol{b}_1A_{n-2}^{-1}\boldsymbol{b}_1 \end{pmatrix}P_{n-1}=A_{n-1}$$

が成り立つから

$$0=|A_{n-1}|=\begin{vmatrix} A_{n-2} & O_{n-2,1} \\ {}^tO_{n-2,1} & 2\lambda-{}^t\boldsymbol{b}_1A_{n-2}^{-1}\boldsymbol{b}_1 \end{vmatrix}$$
$$=|A_{n-2}|(2\lambda-{}^t\boldsymbol{b}_1A_{n-2}^{-1}\boldsymbol{b}_1)$$

ゆえに $2\lambda-{}^t\boldsymbol{b}_1A_{n-2}^{-1}\boldsymbol{b}_1=0$ …… ①

$$0=|A|=\begin{vmatrix} A_{n-2} & O_{n-2,2} \\ {}^tO_{n-2,2} & C-{}^tBA_{n-2}^{-1}B \end{vmatrix}$$
$$=|A_{n-2}||C-{}^tBA_{n-2}^{-1}B|$$

ゆえに $|C-{}^tBA_{n-2}^{-1}B|=0$ …… ②

$D=C-{}^tBA_{n-2}^{-1}B$ とおくと

${}^tD={}^tC-{}^tB{}^t(A_{n-2}^{-1})B=C-{}^tBA_{n-2}^{-1}B=D$

より，D は対称行列である．

$A_{n-2}^{-1}=(e_{ij})$ とおくと

$$D=\begin{pmatrix} 2\lambda & -1 \\ -1 & 2\lambda \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{b}_1A_{n-2}^{-1}\boldsymbol{b}_1 & {}^t\boldsymbol{b}_1A_{n-2}^{-1}\boldsymbol{b}_2 \\ {}^t\boldsymbol{b}_2A_{n-2}^{-1}\boldsymbol{b}_1 & {}^t\boldsymbol{b}_2A_{n-2}^{-1}\boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 2\lambda-e_{n-2,n-2} & -1+e_{n-2,1} \\ -1+e_{1,n-2} & 2\lambda-e_{11} \end{pmatrix}$$

よって ② から

$$(2\lambda-e_{n-2,n-2})(2\lambda-e_{11})=(e_{n-2,1}-1)^2$$

また①から $2\lambda-e_{n-2,n-2}=0$ であるから

$$e_{n-2,1}=e_{1,n-2}=1$$

A_{n-2} の余因子行列を $\widetilde{A}_{n-2}=(\widetilde{a}_{ji})$ とおくと

$$A_{n-2}{}^{-1}=\frac{1}{|A_{n-2}|}\widetilde{A}_{n-2} \quad (\text{実は⑿から } |A_{n-2}|=1)$$

であるから

$$|A_{n-2}|e_{11}=\widetilde{a}_{11}=\begin{vmatrix} 2\lambda & -1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2\lambda & -1 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2\lambda & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ & & & \cdots\cdots\cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & -1 & 2\lambda \end{vmatrix}$$

$$=\widetilde{a}_{n-2,n-2}$$

$$=|A_{n-2}|e_{n-2,n-2}$$

となり　$e_{11}=e_{n-2,n-2}(=2\lambda)$ を得る．

以上のことより　$D=O_{2,2}$ であるから

$$A={}^tP\begin{pmatrix} A_{n-2} & O_{n-2,2} \\ {}^tO_{n-2,2} & O_{2,2} \end{pmatrix}P \qquad \text{となる．}$$

$Px=y=\begin{pmatrix} y' \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}$ とおくと

$$(A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})=\left(\begin{pmatrix} A_{n-2} & O_{n-2,2} \\ {}^tO_{n-2,2} & O_{2,2} \end{pmatrix}P\boldsymbol{x},\ P\boldsymbol{x}\right)$$

$$=\left(\begin{pmatrix} A_{n-2} & O_{n-2,2} \\ {}^tO_{n-2,2} & O_{2,2} \end{pmatrix}\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y}\right)$$

$$=(A_{n-2}\boldsymbol{y}',\ \boldsymbol{y}')\geqq 0$$

■

具体的に $n=5$ の場合を考えてみる．

$$\widetilde{A}_3=\begin{pmatrix} 4\lambda^2-1 & 2\lambda & 1 \\ 2\lambda & 4\lambda^2 & 2\lambda \\ 1 & 2\lambda & 4\lambda^2-1 \end{pmatrix}(=A_3{}^{-1}),$$

$$A_3{}^{-1}\boldsymbol{b}_1=-{}^t(g_1(\lambda)\quad g_2(\lambda)\quad g_3(\lambda)),$$

$$A_3{}^{-1}\boldsymbol{b}_2={}^t(g_3(\lambda)\quad g_2(\lambda)\quad g_1(\lambda))$$

となり，${}^t(y_1y_2\cdots\cdots y_5)=P^t(x_1x_2\cdots\cdots x_5)$ とおくと

$$y_1=x_1-g_1(\lambda)x_4+g_3(\lambda)x_5,$$

$$y_2=x_2-g_2(\lambda)x_4+g_2(\lambda)x_5,$$

$$y_3=x_3-g_3(\lambda)x_4+g_1(\lambda)x_5,$$

$$y_4=x_4,\quad y_5=x_5$$

$$(x_1{}^2+\cdots\cdots+x_5{}^2)\lambda-(x_1x_2+\cdots\cdots+x_4x_5-x_5x_1)$$

$$=(y_1{}^2+y_2{}^2+y_3{}^2)\lambda-(y_1y_2+y_2y_3) \tag{14}$$

⒁の右辺の式について

$$2\lambda(y_1{}^2+y_2{}^2+y_3{}^2)-2(y_1y_2+y_2y_3)$$

$$=2\lambda\left(y_1-\frac{y_2}{2\lambda}\right)^2+\frac{4\lambda^2-1}{2\lambda}y_2{}^2-2y_2y_3+2\lambda y_3{}^2$$

$$=2\lambda\left(y_1-\frac{y_2}{2\lambda}\right)^2+\frac{g_3(\lambda)}{g_2(\lambda)}y_2{}^2-2y_2y_3+2\lambda y_3{}^2$$

$$=2\lambda\left(y_1-\frac{y_2}{2\lambda}\right)^2+\frac{g_3(\lambda)}{g_2(\lambda)}\left\{y_2-\frac{g_2(\lambda)}{g_3(\lambda)}y_3\right\}^2+\frac{2\lambda g_3(\lambda)-g_2(\lambda)}{g_3(\lambda)}y_3{}^2$$

$$=\frac{g_2(\lambda)}{g_1(\lambda)}\left\{y_1-\frac{g_1(\lambda)}{g_2(\lambda)}y_2\right\}^2+\frac{g_3(\lambda)}{g_2(\lambda)}\left\{y_2-\frac{g_2(\lambda)}{g_3(\lambda)}y_3\right\}^2+\frac{g_4(\lambda)}{g_3(\lambda)}y_3{}^2$$

と変形できる．$\lambda=\cos\frac{\pi}{5}$ であるから $1\leqq i\leqq 4$ のとき $g_i(\lambda)>0$ より⒁の右辺は正または0となる．

上の考察から行列を用いない【8】の初等的証明が得られる．

【10】 $\lambda=\cos\frac{\pi}{n}$ $(n\geqq 3)$ とし，実数 $x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n$ に対して

$$y_1=x_1-g_1(\lambda)x_{n-1}+g_{n-2}(\lambda)x_n$$

$$y_2=x_2-g_2(\lambda)x_{n-1}+g_{n-3}(\lambda)x_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{n-2}=x_{n-2}-g_{n-2}(\lambda)x_{n-1}+g_1(\lambda)x_n$$

とおくと

$$\lambda(x_1{}^2+\cdots\cdots+x_n{}^2)-(x_1x_2+\cdots\cdots+x_{n-1}x_n-x_nx_1)$$

$$=\lambda(y_1{}^2+\cdots\cdots+y_{n-2}{}^2)-(y_1y_2+\cdots\cdots+y_{n-3}y_{n-2}) \tag{15}$$

が成り立つ．

⒂の右辺の式を展開して計算すれば証明できる．

さて，⒂の右辺の式について

$$2\lambda(y_1{}^2+y_2{}^2+\cdots+y_{n-2}{}^2)-2(y_1y_2+\cdots+y_{n-3}y_{n-2})$$

$$=\frac{g_2(\lambda)}{g_1(\lambda)}\left\{y_1-\frac{g_1(\lambda)}{g_2(\lambda)}y_2\right\}^2+\frac{g_3(\lambda)}{g_2(\lambda)}\left\{y_2-\frac{g_2(\lambda)}{g_3(\lambda)}y_3\right\}^2+\cdots\cdots+\frac{g_{n-2}(\lambda)}{g_{n-3}(\lambda)}\left\{y_{n-3}-\frac{g_{n-3}(\lambda)}{g_{n-2}(\lambda)}y_{n-2}\right\}^2+\frac{g_{n-1}(\lambda)}{g_{n-2}(\lambda)}y_{n-2}{}^2$$

と変形できるから(8)の不等式が成り立つ．

$\longrightarrow n=5$ の場合は次のように証明する方が簡単である．

$\theta=\frac{\pi}{5}$，$\lambda=\cos\theta$ とおくと $3\theta=\pi-2\theta$

ゆえに　$\sin 3\theta=\sin 2\theta$

$$3\sin\theta-4\sin^3\theta=2\sin\theta\cos\theta$$

$\sin\theta\neq 0$ であるから $3-4(1-\cos^2\theta)=2\cos\theta$

ゆえに　$4\lambda^2-2\lambda-1=0$ ……③

$$\lambda(x_1{}^2+\cdots\cdots+x_5{}^2)-(x_1x_2+\cdots\cdots+x_4x_5-x_5x_1)$$

$$=\lambda x_5{}^2+(x_1-x_4)x_5+\lambda x_2{}^2-(x_1+x_3)x_2$$

$$+\lambda(x_1{}^2+x_3{}^2+x_4{}^2)-x_3x_4$$

これをFとおき，平方の形をつくると

$$F=\lambda\left(x_5+\frac{x_1-x_4}{2\lambda}\right)^2+\lambda\left(x_2-\frac{x_1+x_3}{2\lambda}\right)^2$$
$$+\left(\lambda-\frac{1}{2\lambda}\right)x_1{}^2+\frac{1}{2}(x_4-x_3)^2+\frac{x_1}{2\lambda}(x_4-x_3)$$

となり，③を用いると $\lambda-\dfrac{1}{2\lambda}=\dfrac{1}{8\lambda^2}$ であるから

$$F=\lambda\left(x_5+\frac{x_1-x_4}{2\lambda}\right)^2+\lambda\left(x_2-\frac{x_1+x_3}{2\lambda}\right)^2$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{x_1}{2\lambda}-(x_4-x_3)\right\}^2$$

と変形できて $F\geqq 0$ が証明できる。

5. マルコフの不等式

> **定理 3**　実数係数の n 次多項式 $p(x)$ が
> $[-1,\ 1]$ で $|p(x)|\leqq 1$ を満たすならば
> $[-1,\ 1]$ で $|p'(x)|\leqq n^2$ が成り立つ。
> 　等号は $p(x)\equiv T_n(x)$，$x=\pm 1$ または
> $p(x)\equiv -T_n(x)$，$x=\pm 1$ のときに限る。

(証明は例えば参考文献 8，9 参照)

入試問題には $n=2$ の場合が出題されている。

> 　実数 a，b，c に対して
> $-1\leqq x\leqq 1$ において $-1\leqq ax^2+bx+c\leqq 1$ が成り立つならば，$-1\leqq x\leqq 1$ において
> $-4\leqq 2ax+b\leqq 4$ が成り立つことを証明せよ。
> (S 56　学習院大—文)

> 　関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ は $|x|\leqq 1$ で
> $|f(x)|\leqq 1$ を満たしている。このとき，$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ について
> (1)　$|f'(1)|\leqq 4$ を示せ。
> (2)　$|f'(1)|=4$ となる $f(x)$ をすべて求めよ。
> (S 63　東京工大)

> 　関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ は，$0\leqq x\leqq 2$ において，常に $|f(x)|\leqq M$ を満たすとする。ただし，a，b，c，M は定数である。
> (1)　各係数 a，b，c を $f(0)$，$f(1)$ および $f(2)$ を用いて表せ。
> (2)　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は $0\leqq x\leqq 2$ において，常に $|f'(x)|\leqq 4M$ を満たすことを示せ。
> (H 1　大阪教育大—数学系)

入試問題の背景によく見かけるチェビシェフの多項式についてまとめてみたが，基本的性質については参考文献 10 に詳しく解説されている。

〈参考文献〉

1．ア・エム・ヤグロム，イ・ヤグロム(筒井孝胤訳)，「初等的に解いた高等数学の問題(IV)」，東京図書
2．加藤敏夫，「位相解析」，共立出版
3．「数学セミナー リーディングス数学の問題　エレガントな解答をもとむ第 2 集」，日本評論社
4．安田亨，「チェビシェフの多項式—ある最小値問題」，大学への数学 '77 年 12 月号，東京出版
5．安田亨，「63 傾向と対策 基礎解析」，旺文社
6．NOBUO OZEKI，「On P. Erdös' Inequality to the Triangle」，Journal of the College of Arts and Sciences, Chiba University, Vol, 2, No 3, March 1957, Page 247
7．佐武一郎，「線型代数学」，裳華房
8．小松勇作，「特殊函数」，朝倉書店
9．小松勇作，「特殊函数演習」，朝倉書店
10．松浦重武，「円形の池に浮かぶ中の島の形について」，数学セミナー '84 年 8 月号

(栃木県立 栃木高等学校)