東大入試と代数拡大

岡田(おかだ)　恭二(きょうじ)

はじめに，1990 年の東京大学の入試問題を紹介しましょう．

> 3 次方程式 $x^3+3x^2-1=0$ の 1 つの解を α とする．
> (1) $(2\alpha^2+5\alpha-1)^2$ を $a\alpha^2+b\alpha+c$ の形で表せ．ただし，a, b, c は有理数とする．
> (2) 上の 3 次方程式の α 以外の 2 つの解を (1) と同じ形の式で表せ．

ある受験雑誌の解答を見てみると「基本的」な問題となっていました．

解答 (1) $\alpha^3+3\alpha^2-1=0$ から

$$\begin{aligned}(2\alpha^2+5\alpha-1)^2 &= 4\alpha^4+20\alpha^3+21\alpha^2-10\alpha+1\\ &=(\alpha^3+3\alpha^2-1)(4\alpha+8)-3\alpha^2-6\alpha+9\\ &=-3\alpha^2-6\alpha+9 \quad \cdots\cdots (答)\end{aligned}$$

(2) 残りの解を β, γ とおくと

$\alpha+\beta+\gamma=-3$, $\alpha\beta\gamma=1$

ゆえに $\beta+\gamma=-\alpha-3$, $\beta\gamma=\dfrac{1}{\alpha}=\alpha^2+3\alpha$ から

β, γ は t についての 2 次方程式

$t^2+(\alpha+3)t+(\alpha^2+3\alpha)=0$

の解である．よって

$$\left(t+\frac{\alpha+3}{2}\right)^2=\frac{(\alpha+3)^2}{4}-(\alpha^2+3\alpha)$$

$$=\frac{-3\alpha^2-6\alpha+9}{4}=\left(\frac{2\alpha^2+5\alpha-1}{2}\right)^2$$

$$t+\frac{\alpha+3}{2}=\pm\frac{2\alpha^2+5\alpha-1}{2}$$

したがって　$t=-\dfrac{\alpha+3}{2}\pm\dfrac{2\alpha^2+5\alpha-1}{2}$

ゆえに α 以外の 2 解は

$\alpha^2+2\alpha-2$ と $-\alpha^2-3\alpha-1$ $\quad\cdots\cdots$ (答)

しかし，中々良問ではないでしょうか．出題者側としては，明らかに「代数拡大」を意識していると思われる．

つまり，次のことがらがテーマである．

> 有理数体 Q 内の 3 次式を $f(x)=x^3+ax+b$ とする．
> $f(x)=0$ の 3 根を α, β, γ として判別式を
> $D=(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2$ とするとき
> (1) $D=-4a^3-27b^2$ である．
> (2) Q 上の $f(x)$ の分解体は $\mathrm{Q}(\sqrt{D},\ \alpha)$ である．

実際に，$x^3+3x^2-1=0$ を $x=y-1$ として x^2 の項を消去すると，

3 次方程式 $y^3-3y+1=0$

が出来て，$D=-4a^3-27b^2$ を計算すると，$D=81$ であるから　　$\sqrt{D}\in\mathrm{Q}$

これより，$f(x)$ の分解体は，$\mathrm{Q}(\alpha)$ であり，拡大次数は 3 次である．

体 Q 上のベクトル空間として考えれば，基底は，1, α, α^2 であるから，すべての $\mathrm{Q}(\alpha)$ の元は，$a\alpha^2+b\alpha+c$ (a, b, c は有理数) の形で一意的に表すことができる．これが東大入試の (2) のねらいである．

サテ，(1) の意味は何であろうか？

どのようにして $2\alpha^2+5\alpha-1$ を考えついたのであろうか，それを考えよう．

いま，変数変換した $y^3-3y+1=0$ について考えてみよう．3 つの根を α, β, γ とすると，

$D=(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2=81$

また，$y^3-3y+1=(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)$ を両辺微分して

$3y^2-3=\{(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)\}'$

$y=\alpha$ とおくと

$3\alpha^2-3=(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)$

これより $(\beta-\gamma)^2=\dfrac{(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\alpha-\gamma)^2}{(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2}$

$$=\frac{81}{\{3\alpha^2-3\}^2}$$

ゆえに　$\beta-\gamma=\dfrac{3}{\alpha^2-1}$

さて，$\dfrac{3}{\alpha^2-1}\in\mathbf{Q}(\alpha)$ より $a\alpha^2+b\alpha+c$ の形に書けるから

$\dfrac{3}{\alpha^2-1}=a\alpha^2+b\alpha+c$（$a$, b, c 有理数）

とおくと

$\Longleftrightarrow\quad a\alpha^4+b\alpha^3+(c-a)\alpha^2-b\alpha-c-3=0$

ここで $\alpha^3-3\alpha+1=0$ であることを用いて

$$(2a+c)\alpha^2+(2b-a)\alpha+(-b-c-3)=0$$

1, α, α^2 は基底であるから

$$a=2,\ b=1,\ c=-4$$

したがって

$$\beta-\gamma=2\alpha^2+\alpha-4$$

これが β, γ を2根とする2次方程式

$$x^2-(\beta+\gamma)x+\beta\gamma=0$$

の判別式をつくることができる．

$$D=(\beta-\gamma)^2=(2\alpha^2+\alpha-4)^2$$

なお，x の式に戻しておけば

$$2(\alpha+1)^2+(\alpha+1)-4=2\alpha^2+5\alpha-1$$

これが(1)の意味である．

東大入試も，中々粋な問題を出したものだと感心しました．

（参考文献）

「ガロア理論入門」（E・アルティン著）（東京図書）

（京都府立 朱雀高校）