‘Analogy’の一例として
——別解の上にまた別解を——

鈴木（すずき） 雅之（まさゆき）

1 まえがき

昨年夏の日数教の全国大会で，東京理大の長野東先生は，‘受験数学を数学教育に向けて’と題して講演された．その中で先生は「入試に出題された問題も，よく研究すれば活性化された教材となりうる」と話され，例をあげながら，その問の本質，作問意図への迫り方，また別解の考察の重要性などの話をされた．

以下は，長野先生の話の主旨に叶う例のような気がし，また‘Do Math’の一例にでもと思い，記してみた．

2 ‘問題’と‘見かけ上の複数の解’

> $k>0$ とし，xy 平面上の 2 曲線 $y=k(x-x^3)$，$x=k(y-y^3)$ が，第 1 象限に $\alpha \neq \beta$ なる交点 $(\alpha,\ \beta)$ をもつような k の値の範囲を求めよ
>
> （1989 年度，東大(理)）

（解 1） 問題から $\beta=k(\alpha-\alpha^3)$ …… ①

$\alpha=k(\beta-\beta^3)$ …… ②

辺々加えて整理すると，

$\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2=1-\dfrac{1}{k}$ … ③ $\because$ $(k(\alpha+\beta)\neq 0)$

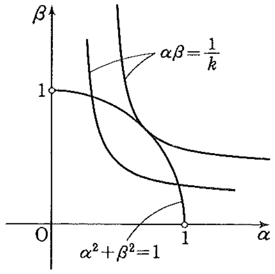
同じく，辺々引いて整理すると，

$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=1+\dfrac{1}{k}$ … ④ $\because$ $(k(\alpha+\beta)\neq 0)$

③，④で辺々加えると，$\alpha^2+\beta^2=1$ …… ⑤

同じく辺々引くと，$\alpha\beta=\dfrac{1}{k}$ …… ⑥

ここで，問題の条件 $\alpha,\ \beta,\ k>0$ から，⑤，⑥を図示すると次の如し．



〈図 1〉

求める k の値の範囲は左図から

$$\frac{1}{k}<\frac{1}{2}$$

$\therefore$ $k>2$ $\because$ $(k>0)$

（解 2） （解 1）の⑤，⑥から

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2-\dfrac{2}{k}=1$ … ⑤′

$\therefore$ $\alpha+\beta=\sqrt{1+\dfrac{2}{k}}$ …… ⑦ $\because$ $(\alpha+\beta>0)$

⑥，⑦の連立で，α，β が相異なる実数解をもつための必要十分条件は

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{k}}\right)^2-4\times\dfrac{1}{k}$

$=1-\dfrac{2}{k}>0$ …… ⑧

$\therefore$ $k>2$ $\because$ $(k>0)$

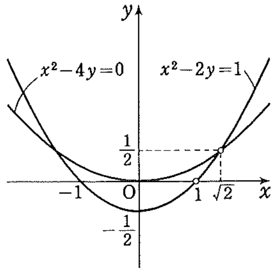
ここで，⑥，⑦から $k>2$ なら $\alpha,\ \beta>0$ が保証されるから，求める k の値の範囲は $k>2$

（解 2）′ $\alpha+\beta=X$，$\alpha\beta=Y$ とおくと，（解 2）の⑤′，⑧はそれぞれ

$X^2-2Y=1$ …… ⑤″

$X^2-4Y>0$ …… ⑧′

これらを X-Y 平面に図示すると，（問題から X，$Y>0$）



左図から

$0<Y\left(=\frac{1}{k}\right)<\frac{1}{2}$

$\therefore\ k>2$

〈図 2〉

（解 3） （解 1）の ⑤ で，$\alpha=\cos\theta$，$\beta=\sin\theta$ とおくと，⑥ は

$$\frac{1}{k}=\alpha\beta=\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta \ \cdots\cdots\ ⑥'$$

$$\left(\text{問題から，}0<\theta<\frac{\pi}{2}\text{，かつ }\theta\neq\frac{\pi}{4}\right)$$

$\therefore\ 0<\frac{1}{k}<\frac{1}{2} \quad \because\ \left(0<\frac{1}{2}\sin 2\theta<\frac{1}{2}\right)$

$\therefore\ k>2$

（解 4） 2 曲線 $y=k(x-x^3)$ …… ①

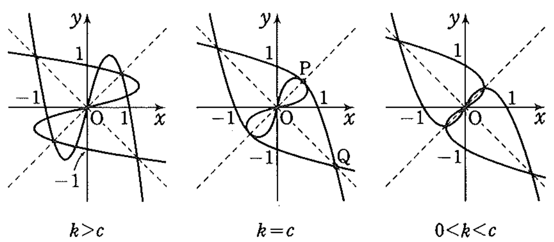
$x=k(y-y^3)$ …… ②

より，それぞれ $\frac{dy}{dx}=k(1-3x^2)$ …… ③

$\frac{dx}{dy}=k(1-3y^2)$ …… ④

③，④ の値が，ともに -1（下図の中央）となる x，y の値は

$$x=y=\sqrt{\frac{k+1}{3k}} \ \cdots\cdots\ ⑤ \quad \because\ (k>0)$$



〈図 3〉 2 曲線の交点と接点

⑤ を ① または ② に代入して

$$\sqrt{\frac{k+1}{3k}}=k\left(\sqrt{\frac{k+1}{3k}}-\frac{k+1}{3k}\sqrt{\frac{k+1}{3k}}\right)$$

$\therefore\ 1=k\left(1-\frac{k+1}{3k}\right) \quad \therefore\ k=2$

〈図 3〉の中央が $k=2$ の状態であるから，問題の条件（図 3 の左）を満足する，求める k の値の範囲は $k>2$

（解 5） $y=k(x-x^3)$ … ①，$x=k(y-y^3)$ … ② で，① を ② に代入して整理すると，

$$x\left\{x^8-3x^6+3x^4-\left(1+\frac{1}{k^2}\right)x^2+\frac{k^2-1}{k^4}\right\}=0 \ \cdots\ ③$$

$\because\ (k\neq 0)$

ここで，（解 4）の図 3 の中央図に対応する ③ 式は

$$x(x-a)^3(x+a)^3(x^2-b^2)=0 \ \cdots\ ④$$

と，予想される．（ここで，図 3 の点 P，Q の座標は，それぞれ $(a,\ a)$，$(b,\ -b)$ 等と考えられる）

④ の左辺を展開して整理すると，

$$x\{x^8-(3a^2+b^2)x^6+3a^2(a^2+b^2)x^4$$
$$-a^4(a^2+3b^2)x^2+a^6b^2\}=0 \ \cdots\cdots\ ④'$$

要するに，図 3 の中央図の k の値を求めることになるが，③ と ④′ から，恒等式の係数比較で，

$$3a^2+b^2=3,\quad a^2(a^2+b^2)=1,\quad a^4(a^2+3b^2)=1+\frac{1}{k^2}$$

この 3 式から $k=2\left(a^2=\frac{1}{2},\ b^2=\frac{3}{2}\right)$

$\therefore$ 求める k の値の範囲は $k>2$

3 アナロジー

（解 4）の〈図 3〉を眺めていると，次の問いが頭に浮かんだ．

> $k>0$ とし，x-y 平面上の 2 曲線
> $y=k(1-x^2)$，$x=k(1-y^2)$ が，$\alpha\neq\beta$ なる交点 $(\alpha,\ \beta)$ をもつような k の値の範囲を求めよ

要するに，前問に対して，曲線の次数を 1 つ下げた連想であるが，しかしこれは〈図 3〉を見ないと思いつきにくい．

さて，この問に対して，前問の（解 1）～（解 5）の方法が活用できそうであるが，それらはすべて可能なのであろうか．

［解 1］ 問題から $\beta=k(1-\alpha^2)$ …… ①

$\alpha=k(1-\beta^2)$ …… ②

辺々加えると，

$$\alpha+\beta=k\{2+2\alpha\beta-(\alpha+\beta)^2\} \ \cdots\cdots\ ③$$

同じく辺々引いて整理すると，$\alpha+\beta=\frac{1}{k}$ …… ④

$\because\ (k(\alpha-\beta)\neq 0)$

③ と ④ から　$\alpha\beta=\dfrac{1}{k^2}-1$ …… ⑤

④ と ⑤ から α, β が相異なる 2 実数である必要十分条件は

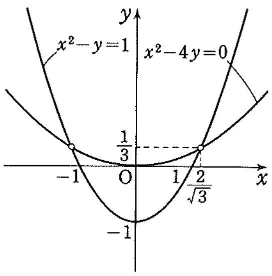
$$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\left(\frac{1}{k}\right)^2-4\left(\frac{1}{k^2}-1\right)>0 \text{ …… ⑥}$$

$$\therefore\ k>\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \because\ (k>0)$$

[解 1]′　$\alpha+\beta=X$, $\alpha\beta=Y$ とおくと，[解 1] の ④, ⑤, ⑥ から　$X^2-Y=1$ …… (④⑤)′

$X^2-4Y>0$ …… ⑥′

これらを X-Y 平面に図示すると



〈図 4〉

左図から

$$0<X\left(=\frac{1}{k}\right)<\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ k>\frac{\sqrt{3}}{2}$$

[解 2]　2 曲線　$y=k(1-x^2)$ …… ①

$x=k(1-y^2)$ …… ②

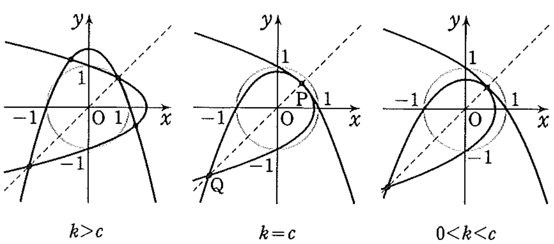
から，それぞれ　$\dfrac{dy}{dx}=-2kx$ …… ③

$\dfrac{dx}{dy}=-2ky$ …… ④

③, ④ の値がともに -1 となる（下図中央）x, y の値は　$x=y=\dfrac{1}{2k}$ …… ⑤　$\because$ $(k>0)$

⑤ を ① または ② に代入して，

$$\frac{1}{2k}=k\left(1-\frac{1}{4k^2}\right) \quad \therefore\ k^2=\frac{3}{4}$$



〈図 5〉　2 曲線の交点と接点

〈図 5〉の中央が $k=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の状態であるから，問題の条件（図 5 の左）を満足する，求める k の値の範囲は　$k>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　$\because$ $(k>0)$

[解 3]　$y=k(1-x^2)$ … ①, $x=k(1-y^2)$ … ② で，① を ② に代入して整理すると，

$$x^4-2x^2+\frac{1}{k^3}x+1-\frac{1}{k^2}=0 \text{ …… ③} \quad \because\ (k>0)$$

ここで，図 5 の中央図に対応する ③ 式は

$$(x-a)^3(x+b)=0 \text{ …… ④}$$

と予想される．（ここで，図 5 の点 P，Q の座標は，それぞれ，$(a,\ a)$, $(-b,\ -b)$）

④ の左辺を展開すると，

$$x^4+(b-3a)x^3+3a(a-b)x^2+a^2(3b-a)x-a^3b =0 \text{ …… ④}'$$

要するに，図 5 の中央図の k の値を求めることになるが，③ と ④′ から，恒等式の係数比較で，

$$b-3a=0,\ 3a(a-b)=-2,\ a^2(3b-a)=\frac{1}{k^3}$$

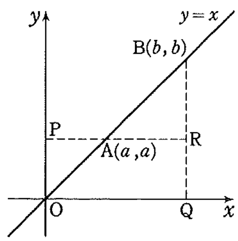
これらから　$k=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\left(a=\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ b=\sqrt{3}\right)$

$\therefore$ 求める k の値の範囲は　$k>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4 別解の上にまた別解を！

都数研・学習指導法分科会の渋谷，竹村両先生は {相加平均≧相乗平均} という関係を，式の上だけでなく，グラフや図を利用して説明して，生徒の理解を深めさせたいとして，下の 3 例を示している．

① $y=x$ のグラフの利用



$\triangle$OPA

$=\dfrac{1}{2}$OP・PA$=\dfrac{1}{2}a^2$

$\triangle$OQB

$=\dfrac{1}{2}$OQ・QB$=\dfrac{1}{2}b^2$

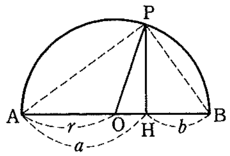
□OPRQ＝OP・OQ$=ab$

$\triangle$OPA＋$\triangle$OQB≧□OPRQ

ゆえに $\dfrac{a^2+b^2}{2}\geqq ab$　ここで a^2 を a，b^2 を b とおくと $\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$

② **半円の利用**

$2r=a+b$ より



$$\mathrm{OP}=r=\frac{a+b}{2}$$

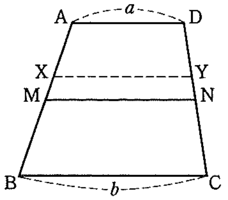
$\triangle\mathrm{APH}\backsim\triangle\mathrm{BPH}$ より

$$\frac{\mathrm{PH}}{a}=\frac{b}{\mathrm{PH}}\quad ゆえに\quad \mathrm{PH}=\sqrt{ab}$$

よって $\mathrm{OP}\geqq\mathrm{PH}$ より $\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$

③ **台形の利用**

右の図で，
台形 AXYD$\backsim$台形 XBCY，
AB，CD の中点を
M，N とする．



$$\mathrm{MN}=\frac{a+b}{2}$$

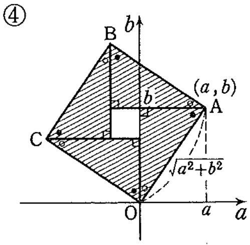
また $\dfrac{a}{\mathrm{XY}}=\dfrac{\mathrm{XY}}{b}$ より $\mathrm{XY}=\sqrt{ab}$

ここで $a\leqq\mathrm{XY}$ より　$\mathrm{AX}\leqq\mathrm{XB}$

すなわち $\mathrm{MN}\geqq\mathrm{XY}$ よって $\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$

これらを拝見して，筆者の思いついた他の 4 例を以下に示す．

④



$$\square\mathrm{OABC}=(\sqrt{a^2+b^2})^2=a^2+b^2$$

$$(斜線部分)=\left(\frac{1}{2}ab\right)\times4=2ab$$

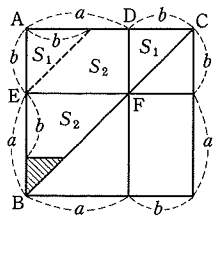
$$\therefore\ a^2+b^2\geqq2ab$$

等号は $a=b$ のとき成立)

ここで a^2 を a，b^2 を b とおくと

$$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$$

⑤



$a\geqq b>0$ なら
斜線部分ができるから

$$\triangle\mathrm{EBF}+\triangle\mathrm{DFC}\geqq\square\mathrm{AEFD}$$

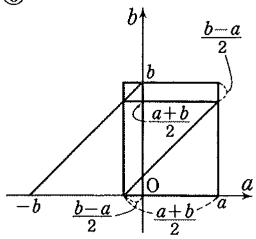
$a=b$ で等号が成り立つ．

$$\therefore\ \frac{a^2+b^2}{2}\geqq ab$$

∴　前と同様にして

$$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$$

⑥



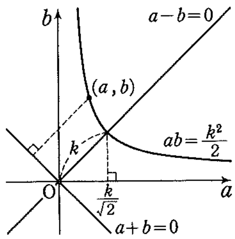
$b\geqq a>0$ なら

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geqq ab$$

$$\because\ \frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$$

⑦　$a>0$，$b>0$ として $\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$ は，点 $(a,\ b)$ と直線 $a+b=0$ との距離．

点 $(a,\ b)$ を通る図の如き直角双曲線は



$$ab=\frac{k^2}{2}\ (k=\sqrt{2ab})$$

$$\therefore\ \frac{a+b}{\sqrt{2}}\geqq\sqrt{2ab}$$

(等号は $a=b$ のとき成立)

$$\therefore\ \frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$$

5 あとがき

2 に示した入試問題の別解群も，その内 2 通り位は，‘入試問題正解’などの既刊本に載っているのである．1 では明らかに他人の別解の上に自分の別解を乗せたのである．はたして，こんな作法が許されるのかどうか，私は一つの数学随筆の方法としては面白いと思うのだが…….

筆者は先に，「$x^2+y^2=1$ のとき $3x+4y$ の最大値を求めよ」に対する 20 通りの解法（別解）を，「$x^2+y^2+z^2=1$ のとき，$3x+4y+5z$ の最大値を求めよ」の解法に対応させることを考え，14 通りまで確認した.[1)]　こんな‘方法’も面白いと思う．

引　用　文　献

1)　鈴木雅之，「Do Math !」の一例として（2 次元から 3 次元へ），神奈川県数学部会通信（p. 50～53），No. 36 (1991)

（湘南工科大学附属高等学校）