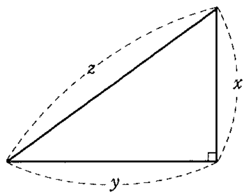
互いに素なピタゴラス数は無限にあり しかも 自然数と対応づけられる

君島（きみじま） 巖（いわお）

高校２年生の時だった．夜中に目を覚ましたとき直角三角形が頭に浮かんだ．そして，直角を挟む２辺が斜辺より短いことを式に表すと，１つの文字に関する２次方程式になるのでは，と思い，すぐ起きて計算を進めた．

以下はそれをまとめたものである．



x, y, z を自然数とすると，ピタゴラスの定理によって

$$x^2+y^2=z^2 \quad \cdots\cdots ①$$

α, β を自然数とすると，明らかに

$$x=z-\alpha \quad \cdots\cdots ②$$

$$y=z-\beta \quad \cdots\cdots ③$$

②, ③ を ① に代入すると，

$$(z-\alpha)^2+(z-\beta)^2=z^2$$

展開して整理すると，

$$z^2-2(\alpha+\beta)z+\alpha^2+\beta^2=0$$

これを解いて

$$z=\alpha+\beta\pm\sqrt{2\alpha\beta}$$

ここで，$\sqrt{2\alpha\beta}$ は自然数であるべきだから，

$$\alpha\beta=2m^2 \quad \cdots\cdots ④$$

ゆえに，$z=\alpha+\beta\pm 2m$ ……⑤

②, ③, ④, ⑤ から

$$\left.\begin{aligned} x&=\beta\pm 2m \\ y&=\alpha\pm 2m \\ z&=\alpha+\beta\pm 2m \\ \alpha\beta&=2m^2 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots ⑥$$

⑥ は負の整数解も含めた場合のピタゴラス数のすべての解である．

いま，正の整数解に限り示すと，次の通りになる．

ピタゴラス数の統一式

α, β, m, x, y, z が自然数のとき，

$$\left.\begin{aligned} x&=\beta+2m \\ y&=\alpha+2m \\ z&=\alpha+\beta+2m \\ &\text{ただし } \alpha\beta=2m^2 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots ⑦$$

は，① のすべての自然数解を与える．

では，実際に求めてみよう．

ｉ） $m=1$ のとき

⑦ から　$\alpha\beta=2\cdot 1^2=2$

よって　$\alpha=2$, $\beta=1$

ゆえに　$x=1+2\cdot 1=3$

$y=2+2\cdot 1=4$

$z=1+2+2\cdot 1=5$

これで有名な３，４，５がでてきた．

ii） $m=2$ のとき

⑦ から　$\alpha\beta=2\cdot 2^2=8$

これは２つの場合に分けられる．

● $\alpha=8$, $\beta=1$ のとき

$x=1+2\cdot 2=5$

$y=8+2\cdot 2=12$

$z=1+8+2\cdot 2=13$

●$\alpha=4$, $\beta=2$ のとき

$x=2+2\cdot2=6$

$y=4+2\cdot2=8$

$z=4+2+2\cdot2=10$

iii) $m=3$ のとき

⑦から　$\alpha\beta=2\cdot3^2=18$

●$\alpha=18$, $\beta=1$ のとき

$x=1+2\cdot3=7$

$y=18+2\cdot3=24$

$z=1+18+2\cdot3=25$

●$\alpha=9$, $\beta=2$ のとき

$x=2+2\cdot3=8$

$y=9+2\cdot3=15$

$z=2+9+2\cdot3=17$

●$\alpha=6$, $\beta=3$ のとき

$x=3+2\cdot3=9$

$y=6+2\cdot3=12$

$z=3+6+2\cdot3=15$

iv) $m=4$ のとき

⑦から　$\alpha\beta=2\cdot4^2=32$

●$\alpha=32$, $\beta=1$ のとき

$x=1+8=9$

$y=32+8=40$

$z=1+32+8=41$

●$\alpha=16$, $\beta=2$ のとき

$x=2+8=10$

$y=16+8=24$

$z=2+16+8=26$

●$\alpha=8$, $\beta=4$ のとき

$x=4+8=12$

$y=8+8=16$

$z=4+8+8=20$

以上から推察されるように，自然数に対応して，ピタゴラス数（互いに素）が存在することが分かり，したがってピタゴラス数は無限に存在する．まとめてみよう．

$m=1 \longrightarrow (3,\ 4,\ 5)$

$m=2 \longrightarrow (5,\ 12,\ 13)$

$m=3 \longrightarrow (7,\ 24,\ 25)$

$\searrow (8,\ 15,\ 17)$

$m=4 \longrightarrow (9,\ 40,\ 41)$

言い遅れたが，⑦の $\alpha\beta=2m^2$ で $\alpha=2m^2$, $\beta=1$ とすると，必ず互いに素なピタゴラス数がでるのである．この場合，z と y の差が必ず1となるからである．

余談になるが，いわゆる「フェルマーの問題」$x^n+y^n=z^n$（$n\geqq3$ の n は自然数）の非可解性については

$x=z-\alpha$, $y=z-\beta$ とおき，

z の n 次方程式の解の存在にもっていく方法があると思う．なぜなら $n=2$ のときが，まさしく，方程式論的に解決されたのだから．

（栃木県立 那須高等学校）