数学的な見方・考え方を育てるために

結川(ゆいかわ)　義明(よしあき)

§ はじめに

授業で，教科書の例題の解き方を説明する際，時間的な問題やその単元での学習事項を用いるため，どうしても説明が一意的になりやすく，その解法の修得に重点が置かれ，数学的な見方・考え方が育ちにくい．

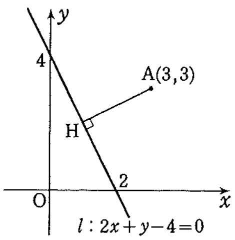
そこで，具体的な問題を既習事項を用いて，できるだけいろいろな方法で解かせることにより，１つの問題でも様々な数学的な見方・考え方があることを発見・理解させる必要があるのではないだろうか．

ここには１つの問題について私が行った指導が記してある．大方の御指導・御批判をいただければ幸いである．

問　題

点 A(3, 3) と直線 l : $2x+y-4=0$ の距離をできるだけいろいろな方法で求めよ．

〔解法１〕 直線 l との交点の座標を使って，距離を求める方法



(解)　点Aから直線 l に垂線を下ろし，その交点をHとする．線分 AH と直線 l は垂直であるから，2直線の垂直条件より

$$\left[\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \iff a_1a_2+b_1b_2=0 \\ \quad\text{が垂直}\end{array}\right]$$

点 A(3, 3) を通り，直線 l に垂直な直線の方程式は　$1\cdot(x-3)-2\cdot(y-3)=0$

$x-2y+3=0$　　となる．

ここで，点Hは直線 l と直線 $x-2y+3=0$ との交点であるから，

連立方程式 $\begin{cases} 2x+y-4=0 \\ x-2y+3=0 \end{cases}$ を解くと $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

すなわち，交点 H(1, 2) となる．

よって，求める距離 AH は

$\mathrm{AH}=\sqrt{(3-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{5}$ ……（答）

〔解法２〕 公式を使って，距離を求める方法

(解)　〔解法１〕の一般化として，次の公式が導かれる．

点と直線の距離の公式

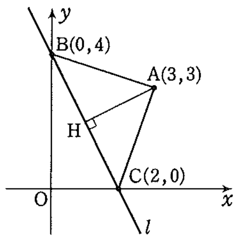
点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

よって，上の公式から求める距離を d とすると

$$d=\frac{|2\cdot3+3-4|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|5|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\ \text{……（答）}$$

〔解法３〕 直線上に２点をとり，三平方の定理を使って距離を求める方法



(解)　直線 l と y 軸，x 軸との交点をB，Cとし点Aと結ぶ．

点Aから直線 l に垂線を下ろし，その交点をHとする．

ここで，△ABH と △ACH はそれぞれ直角三角形であるから，三平方の定理から

$\mathrm{AH}^2+\mathrm{BH}^2=\mathrm{AB}^2$ …… ①

$\mathrm{AH}^2+(\mathrm{BC}-\mathrm{BH})^2=\mathrm{AC}^2$ …… ②

また

$\mathrm{AB}=\sqrt{(3-0)^2+(3-4)^2}=\sqrt{10}$

$\mathrm{AC}=\sqrt{(3-2)^2+(3-0)^2}=\sqrt{10}$

$\mathrm{BC}=\sqrt{(2-0)^2+(0-4)^2}=2\sqrt{5}$　から

①，② はそれぞれ

$\mathrm{AH}^2+\mathrm{BH}^2=10$ …… ①′

$\mathrm{AH}^2+(2\sqrt{5}-\mathrm{BH})^2=10$ …… ②′

となる．②′ から

$\mathrm{AH}^2+20-4\sqrt{5}\cdot\mathrm{BH}+\mathrm{BH}^2=10$

$\mathrm{AH}^2+\mathrm{BH}^2-4\sqrt{5}\cdot\mathrm{BH}=-10$ …… ②″

②″ に ①′ を代入すると

$10-4\sqrt{5}\cdot\mathrm{BH}=-10$

$-4\sqrt{5}\cdot\mathrm{BH}=-20$

$\mathrm{BH}=\dfrac{20}{4\sqrt{5}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

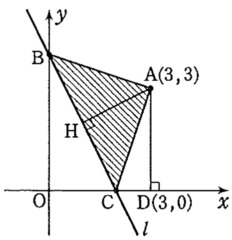
ゆえに，①′ から

$\mathrm{AH}=\sqrt{10-\mathrm{BH}^2}=\sqrt{10-(\sqrt{5})^2}=\sqrt{5}$

…… (答)

(注) ここでは，直線と x 軸，y 軸との交点がともに「格子点」となるので，直線上の 2 点に交点を選んだが，交点が格子点でない場合は，格子点となる別の 2 点を選んだ方が，計算は比較的簡単である．

〔解法 4〕 三角形の面積を使って，距離を求める方法



(解) 直線 l と y 軸，x 軸との交点を B，C とし点 A と結ぶ．また，点 A から x 軸に垂線を下ろし，その交点を D とする．

(△ABC の面積)

=(台形 OBAD の面積)

−{(△OBC の面積)+(△ACD の面積)}

ところで

台形 OBAD の面積$=\dfrac{1}{2}\cdot(3+4)\cdot 3=\dfrac{21}{2}$

△OBC の面積$=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 4=4$

△ACD の面積$=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 3=\dfrac{3}{2}$

よって

△ABC の面積$=\dfrac{21}{2}-\left(4+\dfrac{3}{2}\right)=5$

ここで，点 A から直線 l に垂線を下ろし，その交点を H とすると

△ABC の面積$=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AH}$

$\therefore\ \dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AH}=5$ …… ①

また $\mathrm{BC}=\sqrt{(2-0)^2+(0-4)^2}=2\sqrt{5}$ から

① より $\mathrm{AH}=\dfrac{2\cdot 5}{\mathrm{BC}}=\dfrac{10}{2\sqrt{5}}=\sqrt{5}$ …… (答)

〔解法 5〕 2 次関数を使って，距離を求める方法

求める距離は，点 A から直線 l までの最短距離であるから，この問題は

> **問 題**
>
> $2x+y-4=0$ のとき
>
> $\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$ の最小値を求めよ．

と同値である．

(解) $\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}=d$ …… ① とする．

$2x+y-4=0$ を変形すると

$y=-2x+4$ …… ② が得られる．

① に ② を代入すると

$d=\sqrt{(x-3)^2+\{(-2x+4)-3\}^2}$

$=\sqrt{(x-3)^2+(-2x+1)^2}$

$=\sqrt{5x^2-10x+10}$

$=\sqrt{5(x-1)^2+5}$

よって，d は $x=1$ のとき最小で，最小値は $\sqrt{5}$ である．

ゆえに，求める距離は $\sqrt{5}$ …… (答)

ここまでの〔解法 1〕から〔解法 5〕については数学 I の履習内容を使って解いたものである．

これ以外にも，平行移動と 1 次変換を使って求めることもできる．以下に〔解法 6〕として，その方法を紹介する．

〔解法 6〕 平行移動と 1 次変換を使って，距離を求める方法

(解) 点 A と直線 l を x 軸方向に -2 だけ平行移動し，移動後の点と直線をそれぞれ A′，l' で表す．すなわち

点 A′(1, 3)，直線 l' : $2x+y=0$

となる．(図 I)

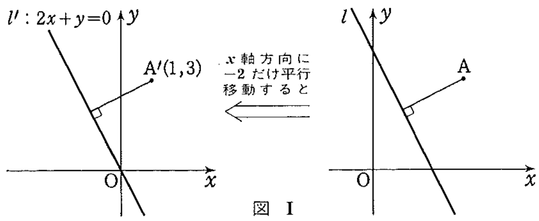


図 I

ここで，直線 l' と x 軸の正の部分とのなす角を θ（$\theta>90°$）とすると，$\tan\theta=-2$ であるから三角関数の相互関係より

$$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}},\ \sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \text{となる.}$$

また，直線 l' を x 軸に変換する1次変換を f とすると，1次変換 f は原点を中心とする $180°-\theta$ の回転であるから，f を表す行列は

$$\begin{pmatrix} \cos(180°-\theta) & -\sin(180°-\theta) \\ \sin(180°-\theta) & \cos(180°-\theta) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

この1次変換 f により，点 $A'(1,\ 3)$ は

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{5}{\sqrt{5}} \\ \frac{5}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

点（$-\sqrt{5}$，$\sqrt{5}$）に移る．（図II）

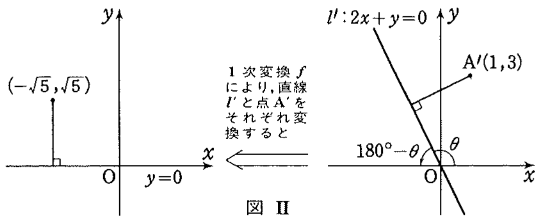


図 II

ゆえに，求める距離は $\sqrt{5}$ ……（答）

§ おわりに

はじめにも述べたように，これらの解法を授業で1つ1つ説明するのは，時間的な制約もあり難しい．そこで，課題という形で生徒にいくつか問題を与え，解法を考えさせてはどうだろうか（当然，解法がいくつか考えられる問題を出し，多少ヒントを与えてもよい）．そして，その解法をいくつか紹介することにより，自分と違った解法（数学的な見方・考え方）があることがわかり，考える楽しさや発見する喜びが得られ，さらに数学的な見方・考え方が育っていくのではないだろうか．そのうちに，こちらが考えてもみなかった独創的でエレガントな解法が見つかるかもしれない．

（埼玉県立 志木高等学校）