教材研究（微積分）

∞^0，0^0 について

塩見(しおみ)　浩三(こうぞう)

1．$\infty^0 \longrightarrow 1$ ？

まず　$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}=1$　の証明

$f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ $(x>0)$ とおき，両辺の自然対数をとると

$$\log f(x)=\frac{1}{x}\log x$$

$$\lim_{x\to\infty}\log f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$$

ここで　$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$　はよく出題される問題である．

証明は，(i) まず，$x>0$ のとき，$\log x<\sqrt{x}$ が成り立つことを示し，はさみうちの原理で

$\lim_{n\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$　を示すものである．

証明　$g(x)=\sqrt{x}-\log x$ とおくと

$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$ となるから増減表は，

x	0		4	
$g'(x)$		$-$		$+$
$g(x)$		↘		↗

$g(4)=2-\log 4=\log\frac{e^2}{4}>0$ $\left(\frac{e^2}{4}>1 \text{ から}\right)$

よって　$x>0$ で，つねに $g(x)>0$

$\therefore$ $\log x<\sqrt{x}$

次に　$1<x$ のとき $0<\log x<\sqrt{x}$　であるから

両辺を x $(x>1)$ で割ると

$$0<\frac{\log x}{x}<\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$ から

$$0\leqq\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}\leqq 0$$

よって，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$$

別解　ロピタルの定理により

$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$ と考えてもよい．

話をもとに帰って

$\lim_{x\to\infty}\log f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ が証明できた．

よって $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}e^{\log f(x)}=e^0=1$

$\therefore$ $\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{x}}=1$

したがって，$\infty^0\longrightarrow 1$ が証明できた．

過去の入試問題では，次のような形で出題されている．

> 例1　$x>0$ のとき
> $(1+x)^n\geqq 1+nx$ $(n=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots)$ が成り立つことを用いて，$1+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt[2n]{n}$ を証明し，極限値
> $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$ を求めよ．　（東京工大）

（解答）

$(1+x)^n\geqq 1+nx$ から

$$1+x\geqq\sqrt[n]{1+nx}$$

$x=\frac{1}{\sqrt{n}}$ とおくと

$$1+\frac{1}{\sqrt{n}}\geqq\sqrt[n]{1+\sqrt{n}}>\sqrt[n]{\sqrt{n}}=\sqrt[2n]{n}$$

よって $1+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt[2n]{n}$　$\cdots\cdots$ ①

① から $\sqrt[n]{1} \leqq \sqrt[n]{n} < \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}=1$, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2=1$ から，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

例 2

(1) n を正の整数とする．$n^{\frac{1}{n}}<1+\frac{2}{\sqrt{n}}$ が成り立つことを証明せよ．

(2) $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}}$ の値を求めよ．（京都産大）

(1) を数学的帰納法で証明しようと考えるのが普通だが，うまくいかない（できるかも知れないが）．

数学的帰納法で証明を試みるうちに，n が正の整数より，$n<\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n$ と同値であり，この式から二項定理がうかべばよいのだが，これは困難であろう．しかし極限値の問題として，この問題は理系の生徒には一度は考えさせておきたい問題ではなかろうか．なお (1) ができなくても (1) の結果を用いて (2) を解く指導はしておきたい．

（解答）

(1) $x>0$ のとき，二項定理により

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\cdots\cdots+x^n$$

各項は正で，$n\geqq 1$ から

$$(1+x)^n\geqq 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$$

$x=\sqrt{\frac{2}{n}}$ とおくと

$$\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n\geqq 1+2\sqrt{n}+2(n-1)$$
$$=2n+2\sqrt{n}-1>n$$
$$\therefore\ 1+\frac{2}{\sqrt{n}}>n^{\frac{1}{n}}$$

(2) $1\leqq n$ から $1^{\frac{1}{n}}\leqq n^{\frac{1}{n}}<1+\frac{2}{\sqrt{n}}$

$\lim_{n\to\infty}1^{\frac{1}{n}}=1$, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)=1$ から はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$$

2．$0^0\longrightarrow 1$ ？

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ を考える

$f(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(x>0)$ とおき

両辺の自然対数をとると

$$\log f(x)=\frac{1}{x}\log\frac{1}{x}=-\frac{\log x}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\log f(x)=\lim_{x\to\infty}-\frac{\log x}{x}=0\ (-0)$$

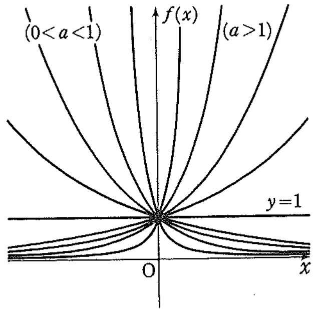
1 と同様にして

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}e^{\log f(x)}=e^0=1$$

$$\therefore\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=1$$

したがって　$0^0\longrightarrow 1$

指数関数のグラフで底を 0 から∞まで動かして，直観的に $\infty^0\to 1$, $0^0\to 1$ と考えることもできそうである．指数関数では底 1 は考えないがグラフでは底 1 の場合も考えて指導すると，$0<a<1$ と $1<a$ でグラフが単調減少から，単調増加に変わることなどが理解できて生徒は興味をもつ．なぜ底は 1 でないと定義するのかなどと思うこともある．



$y=a^x$ のグラフ

（愛媛県立 大三島高等学校）