生徒を数学好きにする指導のポイント
―「わかる」から「できる」への思考法の転換 ―

秋葉（あきば）　寿夫（ひさお）

長年，数学教育にたずさわってきて，つねづね感じることは，生徒にとって本当にわかる授業を行なうことの難しさである．生徒が学ぶことの基本は

「わかる」ことと「できる」こと

が両立することである．　つまり，わかって，できたときに，はじめて真の学習活動が成り立つと考えられる．「わかる」ことと「できる」ことのどの１つが欠けても充分な学習ができたことにはならない．その意味で，本当に生徒に学習内容を理解させ，問題解決に習熟させうる授業ができてはじめて，望ましい授業が展開されることになる．数学の授業では(他の教科でも同様であるが)，学習の基本のできている生徒とできていない生徒の両方の生徒達を同時に指導することになるが，どちらかというと，一般的に学習の基本のできていない生徒の方が多く見られる．そして，通常すべての生徒を上にあげた真の学習の基本のできる生徒になるように指導することの難しさを痛感することになる．ここでは，いかにして数学の不得意な生徒達をいきいきと授業に取り組むようにさせるかという観点から，１つの考え方を述べてみたい．

まず，はじめに，今までの数学の不得意な生徒に対する指導をふり返ってみたい．

ある学習内容について指導する場合

「基本的事項の説明→基本の例題説明→類題の解法練習→次項の学習内容の基本的事項の説明→基本の例題説明→類題の解法練習　……　以下同じ」

基本事項について，やや程度の高いものについては，すぐに理解できないとき，その項目をとばすか，あるいは天下り的に無理に覚えさせるか，いずれかで処理していることが多い．つまり生徒は基本的な事柄についても充分理解できない状態で学習活動を続けていくことになる．

以上のことについて，１つの例をあげてみたい．

内分点・外分点の座標について定理として

「平面上の２点 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$ が与えられたとき，線分 AB の中点Mの座標は

$M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$ で与えられる」

を学習した後，次の問題を解かせるものとする．

> (1)　２点 $A(1,\ 2)$，$B(5,\ 4)$ について，線分 AB の中点Mの座標を求めよ．
> (2)　２点 A，B について，点Aの座標が $(2,\ 3)$ で，線分 AB の中点 M′ の座標が $(5,\ 4)$ のとき，点Bの座標を求めよ．

定理の学習後，(1) については，ほとんどの生徒が定理を用いて，ただちに，$M\left(\dfrac{1+5}{2},\ \dfrac{2+4}{2}\right)$

よって $M(3,\ 3)$ として，中点Mの座標を求めることができる．つまり，(1) 型の問題については，充分理解できて，ほとんど正解を出すことができる．

これに対し，(2) はふつう次のように解かれる．

(2) の解：

求める点Bの座標を $(x',\ y')$ とすると

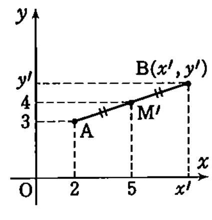
AB の中点は $M'(5,\ 4)$

であるから

$5=\dfrac{2+x'}{2}$，$4=\dfrac{3+y'}{2}$

これより $x'=8$，$y'=5$

よって，求める点Bの座標は，$B(8,\ 5)$



上の下線部分 ～～～ の表し方について，気づかな

い生徒は，解き方の糸口がつかめず，上の問題は解けない．このことは問題の構造に対する本質的な考え方についての理解が充分なされていないからで，このことについては，後ほど詳述してみたい．つまり，数学の不得意な生徒は，ほとんど(2)について，解答のはじめの下線部分 ～～～ を思いつくことが出来ず，解けないことになる．したがって，指導者としては，問題の成り立ちと下線部分 ～～～ について，何故そのように考えるのか，その考え方を充分生徒に理解させることが必要であると考えられる．

実は，大抵の指導者は，通常，上の考え方を何げなく，無意識的に用いて問題を解いていると考えられる．これについて，後ほど詳しく分析し，指導上の参考に供したい．指導者側にとって，ほとんど無意識といってよいくらいの下線部分 ～～～ の考え方は常識と考えられるかもしれないが，実はよく考えてみると，生徒にとっては実にこのことこそが数学学習上のつまずきの原因になっているのである．

それが，わからない限り，(1)型の問題は解けるが，(2)型の問題は解けない生徒が増加することになる．次の学習内容についても，同じことの繰り返しで，これではいつまでたっても出来るように，ひいては，創造性のある考え方で，数学の授業に取り組むようにさせる指導は望めない．

以上の反省から，自主的に学習に取り組む生徒を育てるために，また授業を活発化させるために，指導上，次の２点について，提案してみたい．

まず第１点として，すべての生徒に学習の基本について充分理解させたい．はじめにも述べたが「学習の基本」［わかって，できること］について少し詳しく紹介してみたい．

＜学習の基本＞

学び
- わかる［知］
  - ① 事　柄 … 原理•法則を知る
  - ② 方　向 … 目的を明確化する
- できる［行］
  - ③ 実　践 … 問題の練習
  - ④ 考え方 … 学習内容の受容

以上の ①～④ について，さらに詳しく述べれば，

① 事柄 … 原理•法則を知る．基本事項の理解と記憶．

② 方向 … 学ぶ方向．何のために学ぶのか，目的を明確にする．すなわち，常に目的を明確にして進む．併せて，何がわかっていて，何がわからないかを明確にすること．

③ 実践 … 身体を通して実行する．問題の練習．

④ 考え方 … 受け止め方が間違っているかいないかを確認する．

上の「学習の基本」について，充分説明することにより，学ぶことの意義と意欲が喚起されると考えられる．数学の不得意な生徒は，普通，上の「学習の基本」について，充分理解できていない．したがって，学習とは，「わかる」ことと「できる」ことが両立してはじめて達成されることを意識させることが学習指導上，最重要と考えられる．「わかる」ことの大切さがわかれば，授業中よく聞く態度が育ち，「できる」ことの大切さがわかれば，家庭での自主的な自学自習（予習，復習）の態度が育つと考えられる．授業と家庭学習の二面が充分達成されたとき，真の学習活動が実現して，そこから，創造性あふれる思考力も養成され，より高度な学習へと進むことができると考えられる．学習意欲の旺盛な生徒が半分以上占めれば，いきいきした授業展開が期待でき，指導者側も大いに指導に対して，創意工夫して，授業に望む姿勢も併せて喚起されることにつながるものと考えられる．

以上の観点から，まず第一に「学習の基本」の認識を１人１人の生徒が持つように指導することが，何よりも意欲的に学習に取り組む姿勢を身につけさせる最良の方法と考えられる．学ぶ姿勢ができていることが，より真の学習への準備として，つまり学習内容を本当に「わかろう」とし，次に本当に「できる」ようになりたいという，より望ましい学習態度の育成につながるものと考えられる．

「学習の基本」の考えを学び，真に学習したいという意欲がでてきて，より具体的に問題に対する考え方が充分理解され，問題解法の一定の手続きを習得したとき，授業は本来の機能を果たすものと期待される．

次に，第２点，「生徒を意欲的に数学に取り組むようにさせる考え方」について述べてみたい．

数学の不得意な生徒に共通にみられることとして問題の構造から考えられる本質的な考え方の理解不足から，つねに自分の前の壁をつき破れずに進むこ

とができない．つまり，「いきづまり」の状態が意識の上で固定化し，前進できないことがあげられる．つまり，基本事項確認のための問題は解けるが，少し複雑な条件を含む問題に対しては，１歩も進めずつねに自力では解決できず，解けたとしてもそれは解法をまる暗記したものを記述したに過ぎない場合が多い．

以下述べることは数学の授業の中で，つねづね無意識に教師が使っている考え方で，実はこの考え方を充分理解することが，数学学習の困難を切り開く鍵になると考えられるものである．

まず次に，２つの問題について考えてみたい．

[1]	①	2 に 3 を加えるといくらか．
	②	5 に 6 を掛けるといくらか．
[2]	③	6 に何を加えると 10 になるか．
	④	8 に何を掛けると 40 になるか．

上の [1] 型，[2] 型の問題は根本的に異なる考え方が存在する．

まず，[1] 型の問題の特徴は，与えられた条件を用いて，自然の順序にしたがって結果を導くことができることである．式で表してみれば

$$2+3=\square,\quad 5\times 6=\square$$

を満たす □ を求めればよいことになる．

次に，[2] 型の問題の特徴は，与えられた条件の中に本来後から結果として得られるものが含まれ，はじめに与えられるべきものを求める．つまり，与えられた条件から出発して，自然の順序にしたがって考えたのでは問題の答が得られないことである．説明の都合上，今述べたことを図示してみる．

求める数を □ で表すと次のようになる．

6＋□＝⑩　（□＝10－6＝4）
→〔後から左辺の計算の結果得られる数〕
↓
〔はじめに与えられるべき数〕

8×□＝⑩　（□＝40÷8＝5）
→〔後から左辺の計算の結果得られる数〕
↓
〔はじめに与えられるべき数〕

上のことは，一般に，$a+b=c$，$a\times b=c$ について説明すれば，この計算の共通な性質は原理的に，$[a,\ b]$ が最初に与えられてから，計算の結果として，本来 c が決定することである．つまり，絶対の流れ，順序が存在する．つまり，

$a+b=c$，$a\times b=c$　すなわち，$[a,\ b]\longrightarrow c$

実は，説明の都合上 6＋□＝10，8×□＝40 と示したが，これは [2] 型の問題を [1] 型の問題に転換することによって，[2] 型の問題が解決されることを示している．そして [2] 型の問題解法のポイントは，実に，簡単な表現である下線部分 〰〰 の

「求める数を □ で表す」

にあることに注目していただきたい．

以上，みてきたように，問題は２つの型に分類されることになる．

まず，「考え方」を次のように定義する．

[思考法]

順思考…与えられた条件から出発して，自然の順序にしたがって結論を導く考え方．

逆思考…はじめに与えられる条件の中に，本来は後から得られるべき結果を最初の条件として与えて，結論を導く考え方．

これによれば，上に述べた [1] は順思考型問題，[2] は逆思考型問題といえる．

そして，四則演算（加法，減法，乗法，除法）は次のように分類される．

四則演算 ｛ 加法・乗法…順思考型
　　　　　 減法・除法…逆思考型

小学校以来，学んでいる最も基本的な四則演算が根本的に異なる考え方を含み，２種類の考え方で分類されることは，非常に興味深い事実である．

上でみてきたように，逆思考型問題は，逆思考を順思考に転換すること（以後，順思考化とよぶことにする）により解決される．つまり，本質的に，逆思考は順思考によらない限り解決されない．

解法の過程を図示すれば，次のようになる．

逆思考型問題 $\xrightarrow{\text{［順思考化］}}$ 順思考型問題 $\xrightarrow{\text{［順思考］}}$ 解

逆思考型問題で，逆思考の順思考化の方法は，求めるべきもの（これは問題により種々考えられる）を「とりあえず x とする」というように，求めるべきものが，既に求められたものとして，順思考により立式することである．

簡単にいえば，逆思考の順思考化のポイントは，（求めるべきものが求められたものとして），とり

あえず求めるべきものを適当な文字で表す　ことである．

数学の不得意な生徒の学習困難の原因は，上に述べた問題の構造上からくる 順思考•逆思考 の判断が的確に出来にくいところにあると考えられる．したがって，数学の学習指導のポイントは，どのような問題に対しても，問題の構造が順思考型か逆思考型かいずれに属するかの判断力を身につけさせることにあると考えられる．そして，逆思考型問題に対しては，逆思考の順思考化の方法，すなわち，「求めるべきものをとりあえず □ とすること」を生徒に充分周知徹底させることが基本的に大切である．

生徒に学習意欲の喚起と問題解決能力を身につけさせることができたとき，はじめて本来のいきいきした授業展開が期待できるものと考えられる．

以下，具体的に，順思考型•逆思考型問題の解法を示してみたい．それぞれ対比させて，今まで述べてきたことについてのいくつかの例をあげて，問題の中で，順思考と逆思考がいかにかかわりが深いかをみていただきたい．

例1　A君は定期テストで，数学，国語，英語の得点はそれぞれ，60 点，80 点，70 点であった．このとき，3 科目の平均点はいくらか．

（解）［順思考型］

求める 3 科目の平均点は

$$\frac{60+80+70}{3}=\frac{210}{3}=70\ (\text{点})$$

例2　A君は定期テストで，数学，国語の得点は，それぞれ，60 点，80 点であった．数学，国語，英語 3 科目の平均点は 70 点であった．このとき，A君の英語の得点はいくらか．

（解）［逆思考型］

（求めるべき英語の得点が求められたものとして），とりあえず，求める英語の得点を x とすると（順思考化），$\dfrac{60+80+x}{3}=70$ ［立式 → 計算］

$140+x=210$　ゆえに $x=70$

よって，英語の得点は 70 点

例3　3 点 A$(-3,\ -1)$，B$(5,\ 1)$，C$(2,\ 4)$ のとき，△ABC の重心Gの座標を求めよ．

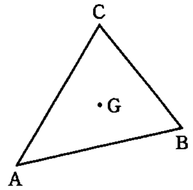
（解）［順思考型］

求める重心Gの座標は，

公式より

$$G\left(\frac{-3+5+2}{3},\ \frac{-1+1+4}{3}\right)$$

ゆえに $G\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$



例4　△ABC において，頂点 A$(-3,\ -1)$，B$(5,\ 1)$ また，重心 $G\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$ のとき，点Cの座標を求めよ．

（解）［逆思考型］

（求めるべき点Cの座標が求められたものとして とりあえず，求める点Cの座標を $(x,\ y)$ とすると

（順思考化）

$$\frac{4}{3}=\frac{-3+5+x}{3},\quad \frac{4}{3}=\frac{-1+1+y}{3}$$

これより，$\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$

よって，求める点Cは，C$(2,\ 4)$ である．

例5　頂点 $(3,\ 1)$，x^2 の係数が 2 の放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ．

（解）［順思考型］

グラフの平行移動の考え方より，求める 2 次関数は，頂点 $(3,\ 1)$，x^2 の係数 2 より，

$$y-1=2(x-3)^2$$

ゆえに　$y=2(x-3)^2+1$

である．［2 次関数は頂点と x^2 の係数で決まる］

例6　頂点が $(3,\ 1)$ で，点 $(4,\ 3)$ を通る放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ．

（解）［逆思考型］

とりあえず，x^2 の係数を a とすると（順思考化），頂点が $(3,\ 1)$ であることから，求める 2 次関数は，

$y-1=a(x-3)^2$　　　とかける．

これは点 $(4,\ 3)$ を通るから

$3-1=a(4-3)^2$　ゆえに　$a=2$

よって，求める 2 次関数は $y=2(x-3)^2+1$ である．

例7　中心 C$(2,\ 3)$，半径 4 の円の方程式を求めよ．

（解）［順思考型］［円は中心と半径で決まる］

中心 C$(2,\ 3)$，半径 4 の円の方程式は

$$(x-2)^2+(y-3)^2=4^2$$

ゆえに　$(x-2)^2+(y-3)^2=16$

である．

例8　2点 A(1, 4), B(5, −2) を直径の両端とする円の方程式を求めよ．

（解）［逆思考型］

中心は直径の中点だから，題意の円の中心Cは

$C\left(\dfrac{1+5}{2},\ \dfrac{4-2}{2}\right)$　ゆえに　C(3, 1)

よって，題意の円の半径を r とすれば（順思考化），求める円の方程式は

$(x-3)^2+(y-1)^2=r^2$ とかける．

これは点 A(1, 4) を通るから

$$(1-3)^2+(4-1)^2=r^2$$

ゆえに　$r^2=4+9=13$

$r>0$　であるから　$r=\sqrt{13}$

よって，求める円の方程式は

$(x-3)^2+(y-1)^2=13$　である．

例9　傾き 3, y 切片 5 の直線の方程式を求めよ．

（解）［順思考型］

直線は傾きと y 切片で決まるから，

傾き 3, y 切片 5 の直線の方程式は

$y=3x+5$　である．

例10　点 A(2, 1) を通り，傾き 3 の直線の方程式を求めよ．

（解）［逆思考型］

求める直線の y 切片を k とすると（順思考化），

求める直線の方程式は

$y=3x+k$　とかける．これは

点 A(2, 1) を通るから，$1=3\times2+k$

ゆえに　$k=-5$

よって，求める直線の方程式は　$y=3x-5$　である．

以上述べてきた順思考，逆思考の考え方について，直接気づいたのは，次の例11，例12 について，その解き方を考えたときであった．そこで，問題の構造上からみられる順思考，逆思考の考え方が顕著に現われる例として，紹介してみたい．

例11　ツルが5羽，カメが3匹いる．ツルとカメの足の本数の総和はいくらか．

（解）［順思考型］

まず，ツルについて，

$5\times2\qquad\qquad=10$（本）……①

（頭かず）　（ツル1羽の足の本数）　（足の総数）

ここで，

（頭かず）×（ツル1羽の足の本数）＝（足の総数）

次に，カメについて，

$3\times4\qquad\qquad=12$（本）……②

（頭かず）　（カメ1匹の足の本数）　（足の総数）

ここで，

（頭かず）×（カメ1匹の足の本数）＝（足の総数）

よって，ツルとカメの足の総本数は，①, ② から

$$10+12=22\text{（本）}$$

ここでは，

（頭かず）×（単位の足の本数）＝（足の総数）

［1羽，1匹］

すなわち，問題の構造上，［頭かず，単位の足の本数］から［足の総数］が計算されることを用いて問題が解決されることがわかる．

例12　［いわゆるツルカメ算とよばれる問題］

ツルとカメがいる．ツルとカメを合わせた数は8，足の総本数は22本である．ツルとカメはそれぞれ何羽，何匹いるか．

（解）［逆思考型］

ツルとカメの数がそれぞれ求められたものとして，とりあえず，求めるツル，カメの数をそれぞれ，x, y とすると（順思考化）

仮定から

$$\begin{cases} x+y=8 & \cdots ①\quad［頭かずの関係式］\\ 2x+4y=22 & \cdots ②\quad［足の本数の関係式］\end{cases}\quad\cdots（立式化）$$

② から　$x+2y=11$ …… ③

③−① から　$y=3$

① から $x+3=8$　ゆえに $x=5$

よって，ツルは5羽，カメは3匹である．

ここで，例11でみたように，足の本数については本質的に，「頭かず」と「単位の足の本数」がわかってはじめて足の総本数が確定するから，頭かずがわ

からなければ足の総数は，計算不可能となり，立式化は困難となる．したがって，上の下線部分 〜〜〜 に気づかなければ立式化は不可能となり，逆思考の順思考化は非常に重要な意味をもつと考えられる．そして，与えられた条件から，いったん立式化されてしまえば，あとは，計算法則を適用することにより，容易に答を出すことができる．以上のことから，学習指導上，生徒に繰り返し，繰り返し説明し，逆思考の順思考化が自然に発想できるようになれば，生徒の数学の学力向上も期待でき，いきいきした授業展開にもつながるものと考えられる．

例 12 でみたように，「求めるものが既に求められたものとして，とりあえず，求めるものを □ とする」というように，極めて簡単な考え方で，この逆思考の順思考化は，ほとんどの生徒に納得させられるものと考えられる．

更に，これらを通して問題に対して，興味を感じ，より創造的意欲的な数学の学習が展開されるものと期待される．

いま，今まで述べてきたことを整理してみれば，次のようになる：

$\boxed{\text{逆思考型問題}} \xrightarrow[\text{[順思考化]}]{\text{逆思考の}} \boxed{\text{順思考型問題}} \rightarrow \boxed{\text{立式}} \xrightarrow[\text{（途中計算）}]{} \boxed{\text{答}}$

［求めるべきものを既に求められたものとして
とりあえず，求めるべきものを □ とする］
‖
＜順思考化のポイント＞

以上，順思考型問題と逆思考型問題を対比させて問題の構造上から起こる考え方について，いくつかの例をみてきました．数学の問題はほんのちょっとした発想の転換により，今まで気づかなかった世界が目の前に現れ，あざやかに問題解決ができることによく出会いますが，この順思考，逆思考の発想もその１つの例として考えられると思います．特に，「考え方」についての発想の転換は生徒に感銘を与えることができるものと思います．

（茨城県立 藤代高等学校）