美しい曲線達

宮川（みやかわ）　幸隆（ゆきたか）

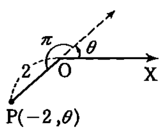
ここでは，**極方程式**と呼ばれる方程式によって表される2つの平面曲線の紹介を行なうことにします．

その為には，まず**極座標**というものを説明しなければなりません．

平面上に1点Oと，Oを端点とする半直線OXとをとります．すると，その平面上のO以外の任意の点Pに対して，OPの長さrと，OPがOXとなす一般角θとが決まります．逆に，rとθとが決まれば点Pが決まります．この意味で，この$(r,\ \theta)$を点Pの**極座標**といい，rをPの**動径座標**，θをPの**偏角座標**と呼びます．また，点Oのことを**極**または**原点**と呼び，半直線OXのことを**始線**または**基線**と呼びます．

点Pが極Oに一致したときは$r=0$で，θは任意であると考えることにします．また，θを一般角にとれば，1つの点Pに対してもθの値は色々と考えられるわけです．たとえば，Pの極座標が$\left(1,\ \frac{\pi}{4}\right)$ならば，これは，また$n$を整数として$\left(1,\ \frac{\pi}{4}+2n\pi\right)$とも表されます．

以上において，動径座標rは正であるとしましたが，便宜上，次のようにrは負にもなり得るものとします．たとえば，極座標$(-2,\ \theta)$は極Oから，θの向きと反対の向きに2の距離にある点Pを表すと考えることにします．すなわち，一般に，$r<0$のとき，極座標$(r,\ \theta)$と極座標$(-r,\ \theta+\pi)$とは同一の点を表すものとします．



直交座標によって色々な曲線の方程式を考えたのと同様に，極座標によっても曲線の方程式を考えることができます．それには，動点Pの座標を$(r,\ \theta)$として，Pの移動条件をr，θの方程式として表せばよいわけです．

逆に，r，θの方程式が与えられれば，その方程式を満たす点$\mathrm{P}(r,\ \theta)$の軌跡として1つの曲線が得られることになります．

極座標を用いて表された曲線の方程式は，**極方程式**と呼ばれます．

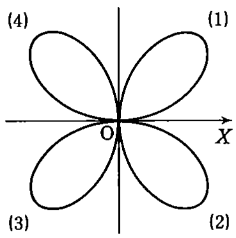
極方程式が与えられたとき，それが表す曲線を描いてみることにしましょう．

$\boxed{\text{例1}}$ 次の極方程式で表される曲線の概形を描け．

$$r=a\sin 2\theta\ (a>0)$$

説明　θの変化に対応してrがどのように変化するのかをみるために，次のような表を作ります．この場合，$\sin 2\theta$の2θに着目して，θが$0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{2}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi,\ \cdots\cdots$のときの$r$に特に注意することが大切です．

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3}{4}\pi$		π	……
r	0	↗	a	↘	0	↘	$-a$	↗	0	……

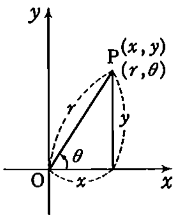


この表によって，$0\leqq\theta\leqq\pi$のときの$\mathrm{P}(r,\ \theta)$の描く曲線は右の(1)，(2)の部分であることがわかります．

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$のときは$r>0$ですから(1)の部分を描き，$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$のときは$r<0$ですから(2)の部分を描きます．$\pi\leqq\theta\leqq 2\pi$のときも全く同様にして描くと，結局，全体としては上のような四つ葉型の曲線が得られます．この曲線の名称は四つ葉のクローバーとでも名付けたいところですが，**Four-Leaved Rose**というこれまた美しい名前がつけられています．

前頁の例1の曲線の概形が図示した通りであることを了解する為には，もっと詳しい情報が必要でしょう：

それらの情報を得る為に，極座標と直交座標との間の関係を考えてみましょう．



原点，x 軸がそれぞれ極，始線と一致するような直交軸をとり，点Pの直交座標を $(x,\ y)$，極座標を $(r,\ \theta)$ とすれば，図から明らかなように，$(x,\ y)$ と $(r,\ \theta)$ の間には次の関係が成り立ちます．

$$① \begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

これから，また $$② \begin{cases} r^2=x^2+y^2 \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x} \end{cases}$$

① から極座標がわかれば直交座標がわかり，② から直交座標がわかれば極座標がわかります．

以上の関係によって，上の 例1 の極方程式を直交座標による曲線の方程式に直すと，

$$r=a\sin 2\theta \quad \cdots\cdots \ (*)$$

から　$r=2a\sin\theta\cos\theta$

両辺に r^2 を掛けて　$r^3=2ar\sin\theta\, r\cos\theta$

①, ② を用いて　$\pm(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=2axy$

両辺を平方して

$$(x^2+y^2)^3=4a^2x^2y^2 \quad \cdots\cdots \ (※)$$

よって，点Pの極座標を $(r,\ \theta)$，直交座標を $(x,\ y)$ とするとき，r と θ の間に関係式 $(*)$ が成り立てば，x と y の間に関係式（※）が成り立ちます．逆に，x と y の間に関係式（※）が成り立てば，①, ② を用いて

$$(r^2)^3=4a^2(r\cos\theta)^2(r\sin\theta)^2$$

ゆえに　$r^6=a^2r^4\sin^2 2\theta$

ゆえに　$r^4(r+a\sin 2\theta)(r-a\sin 2\theta)=0$

ゆえに　$r=0,\ r=\pm a\sin 2\theta$

が成り立ち，$a\sin 2\theta=f(\theta)$ とおくと，

$$f(\theta+\pi)=a\sin 2(\theta+\pi)$$
$$=a\sin(2\theta+2\pi)=a\sin 2\theta=f(\theta)$$

により，点 $(r,\ \theta)$ と点 $(r,\ \theta+\pi)$　すなわち点 $(-r,\ \theta)$ とが同時に曲線 $r=f(\theta)$ 上にあることになり，$-r=f(\theta)$ すなわち $r=-f(\theta)$ が成り立てば，$r=f(\theta)$ が成り立ちます．すなわち，

$$r=-a\sin 2\theta \text{ ならば } r=a\sin 2\theta$$

ですから，x と y の間に関係式（※）が成り立てば，r と θ の間には

$$r=0,\quad r=a\sin 2\theta$$

が成り立ち，$r=0$ は $r=a\sin 2\theta$ に含まれるから，結局，関係式 $(*)$ が成り立つことになります．

以上によって，上の例1の極方程式を直交座標による曲線の方程式に直すと，（※）となることがわかったわけです．

さて，曲線（※）は，その方程式から，x 軸に関しても y 軸に関しても直線 $y=x$ に関しても対称であることがわかります．

よって，例1 の曲線 $r=a\sin 2\theta$ の概形は，θ の変域 $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ に対応する弧の概形さえ描かれれば，あとは容易に描かれることになります．よっていま，$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ とします．

（※）の両辺を x で微分して

$$3(x^2+y^2)^2(2x+2yy')=4a^2(2xy^2+x^2\cdot 2yy')$$

ゆえに　$3x(x^2+y^2)^2+3y(x^2+y^2)^2y'$
$$=4a^2xy^2+4a^2x^2yy'$$

ゆえに　$\{3y(x^2+y^2)^2-4a^2x^2y\}y'$
$$=4a^2xy^2-3x(x^2+y^2)^2$$

ゆえに

$$y'=\frac{x}{y}\cdot\frac{4a^2y^2-3(x^2+y^2)^2}{3(x^2+y^2)^2-4a^2x^2}$$

①, ②, $(*)$ を用いて，

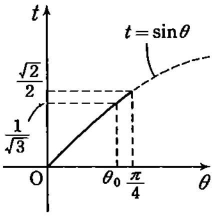
$$\begin{aligned} y'&=\frac{1}{\tan\theta}\cdot\frac{4a^2r^2\sin^2\theta-3r^4}{3r^4-4a^2r^2\cos^2\theta} \\ &=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{4a^2\sin^2\theta-3r^2}{3r^2-4a^2\cos^2\theta} \\ &=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{4a^2\sin^2\theta-3\cdot 4a^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{3\cdot 4a^2\sin^2\theta\cos^2\theta-4a^2\cos^2\theta} \\ &=\frac{\sin\theta(1-3\cos^2\theta)}{\cos\theta(3\sin^2\theta-1)} \\ &=\frac{\sin\theta(1-3\cos^2\theta)}{3\cos\theta\left(\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\sin\theta-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} \end{aligned}$$

となります．いま，$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ であるから

$$3\cos\theta\left(\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)>0$$

であり，y' の分母が0となるのは，θ が，

$\sin\theta_0=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ かつ $0\leqq\theta_0\leqq\dfrac{\pi}{4}$ なる θ_0 に等しいときのみとなります．そして，



$$\lim_{\theta\to\theta_0}\sin\theta(1-3\cos^2\theta)$$
$$=\sin\theta_0(1-3\cos^2\theta_0)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}(-2+3\sin^2\theta_0)$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

から $\displaystyle\lim_{\theta\to\theta_0-0}y'=+\infty,\ \lim_{\theta\to\theta_0+0}y'=-\infty$

となり，曲線 $r=a\sin2\theta$ 上の点 $(\theta_0,\ a\sin2\theta_0)$ における接線は y 軸に平行な直線となります．よって，弧 $r=a\sin2\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$ 上の各点において接線が確定することになり，この弧はいわゆるなめらかな曲線であることがわかります．そして，特に，

$$\lim_{\theta\to+0}y'=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta(1-3\cos^2\theta)}{\cos\theta(3\sin^2\theta-1)}$$
$$=\frac{0\times(-2)}{1\times(-1)}=0$$

であるから，この弧は x 軸に接します．また，

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}y'=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{\sin\theta(1-3\cos^2\theta)}{\cos\theta(3\sin^2\theta-1)}$$
$$=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\dfrac{3}{2}\right)}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{3}{2}-1\right)}=-1$$

であるから，曲線 $r=a\sin2\theta$ は全体としてもなめらかであることがわかります．

更に，

$$y'=-\frac{\sin\theta\left(\cos\theta+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\cos\theta-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\cos\theta\left(\sin\theta+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\sin\theta-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

で，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\frac{\sin\theta\left(\cos\theta+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\cos\theta\left(\sin\theta+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)}<0$$

よって，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ における y' の符号の表は

θ	$0<\theta<\theta_0$	$\theta_0<\theta<\frac{\pi}{2}-\theta_0$	$\frac{\pi}{2}-\theta_0<\theta<\frac{\pi}{2}$
y'	$+$	$-$	$+$

となり，θ の変域 $0\leqq\theta\leqq\theta_0$ に対応する弧は右上がり，$\theta_0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}-\theta_0$ に対応する弧は右下がり，$\dfrac{\pi}{2}-\theta_0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ に対応する弧は右上がりとなります．

例2 点 $(0,\ -a)$ を中心とする半径 a の円の任意の接線に，原点Oから下ろした垂線の足をPとする．Pの軌跡の極方程式は

$$r=a(1-\sin\theta)\ \cdots\cdots\ \text{(A)}$$

であることを示し，さらに，直交座標による方程式は

$$a\sqrt{x^2+y^2}=x^2+y^2+ay\ \cdots\cdots\ \text{(B)}$$

であることを示して，Pの軌跡の概形を分析せよ．

説明 図 2.2 により，

r と θ の間の関係式は，

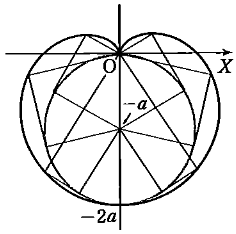


図 2.1

$$r=\mathrm{OQ}\sin\frac{\theta-\frac{\pi}{2}}{2}$$

両辺平方して，

$$r^2=\mathrm{OQ}^2\sin^2\frac{\theta-\frac{\pi}{2}}{2}$$
$$r^2=\mathrm{OQ}^2\frac{1-\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}{2}$$
$$r^2=\mathrm{OQ}^2\frac{1-\sin\theta}{2}$$

一方，余弦定理により

$$\mathrm{OQ}^2=2a^2-2a^2\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=2a^2(1-\sin\theta)$$

これを上の式に代入して

$$r^2=a^2(1-\sin\theta)^2$$

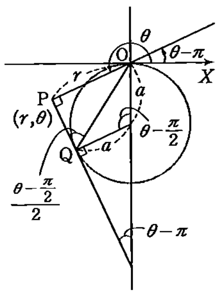


図 2.2

図 2.2 により $r\geqq0$ であるから

$$r=a(1-\sin\theta)$$

よって，Pの軌跡の極方程式は (A) となります．

次に，(A) から

$$r^2=a(r-r\sin\theta)\ \cdots\cdots\ \text{(C)}$$

(A) より $r\geqq0$ であるから，$r=\sqrt{x^2+y^2}$

これを (C) へ代入して，

$$x^2+y^2=a(\sqrt{x^2+y^2}-y)$$

よって，(B) が成り立ちます．

逆に，(B) から

$$a\sqrt{x^2+y^2}=r^2+ar\sin\theta$$

両辺を平方して，

$$a^2(x^2+y^2)=r^2(r+a\sin\theta)^2$$

よって　$a^2r^2=r^2(r+a\sin\theta)^2$

ゆえに

$$r=0,\quad a=r+a\sin\theta,\quad -a=r+a\sin\theta$$

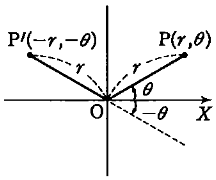
ゆえに

$$r=0,\quad r=a(1-\sin\theta),\quad r=-a(1+\sin\theta)$$

さて，$a(1-\sin\theta)=f(\theta)$ とおくと，

$$f(-\theta)=a(1+\sin\theta)$$

よって $r=-a(1+\sin\theta)$ ならば，$-r=f(-\theta)$ となって，点 $(-r,\ -\theta)$ は曲線 $r=f(\theta)$ すなわち曲線(A)上の点となります．そして，曲線(A)はその作り方から y 軸に関して対称ですから，点 $(-r,\ -\theta)$ が曲線(A)上の点ならば，点 $(r,\ \theta)$ も曲線(A)上の点となります．



よって，

$$r=-a(1+\sin\theta)$$

ならば，$r=a(1-\sin\theta)$ が成り立ちます．

以上によって，x と y の間に関係式(B)が成り立てば，r と θ の間には

$$r=0,\quad r=a(1-\sin\theta)$$

が成り立ち，$r=0$ は $r=a(1-\sin\theta)$ に含まれるから，結局，関係式(A)が成り立つことになります．

このようにして，(B)から(A)が導かれましたから，直交座標による方程式は(B)であることがわかったわけです．

つぎに，曲線(A)は y 軸に関して対称ですから，θ の変域 $\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{3}{2}\pi$ に対応する弧の概形のみ分析することにします．

いま，特に $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi$ とします．

(B)の両辺を x で微分すると，

$$a\cdot\frac{2x+2yy'}{2\sqrt{x^2+y^2}}=2x+2yy'+ay'$$

ゆえに　$a\left(\frac{x}{r}+\frac{y}{r}y'\right)=2x+2yy'+ay'$

$\therefore\ a\cos\theta+y'a\sin\theta=2r\cos\theta+y'(a+2r\sin\theta)$

(A)を代入して

$$a\cos\theta+y'a\sin\theta$$
$$=2a(1-\sin\theta)\cos\theta$$
$$+y'\{a+2a(1-\sin\theta)\sin\theta\}$$

$\therefore\ (a+a\sin\theta-2a\sin^2\theta)y'$

$$=-a\cos\theta+2a\sin\theta\cos\theta$$

ゆえに　$y'=\dfrac{-\cos\theta+\sin2\theta}{\sin\theta+\cos2\theta}$

$$=-\frac{\cos\theta\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)}{\left(\sin\theta+\frac{1}{2}\right)(\sin\theta-1)}$$

よって，$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi$ における y の増減表は，

θ	$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{5}{6}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{5}{6}\pi<\theta<\frac{7}{6}\pi$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{7}{6}\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$
y'	−	0	+	╳	−
y	↘	$\frac{a}{4}$	↗	$-\frac{3a}{4}$	↘

となります．また，ロピタルの定理により，

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}+0}y'=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{(-\cos\theta+\sin2\theta)'}{(\sin\theta+\cos2\theta)'}$$
$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{\sin\theta+2\cos2\theta}{\cos\theta-2\sin2\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}+0}\frac{\sin\theta+2\cos2\theta}{\cos\theta(1-4\sin\theta)}=-\infty$$

となり，弧 $r=a(1-\sin\theta)\left(\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{3}{2}\pi\right)$ は y 軸に接します．また，

$$\lim_{\theta\to\frac{7}{6}\pi-0}y'=+\infty,\quad \lim_{\theta\to\frac{7}{6}\pi+0}y'=-\infty$$

であるから，この弧の上の各点において接線が確定し，この弧はなめらかな曲線であることがわかります．更に $\lim_{\theta\to\frac{3}{2}\pi-0}y'=0$ であるから，曲線(A)は点 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ を除けば，全体としてもなめらかであることがわかります．

ついでに

$$[y']_{\theta=\pi}=\frac{-\cos\pi+\sin2\pi}{\sin\pi+\cos2\pi}=\frac{1}{1}=1$$

であることも曲線(A)の概形の分析に役立ちます．曲線(A)は図 2.1 のようなハート形の曲線で，**カージオイト**（**心臓形**）と呼ばれています．

（参考書）　好学社発行（昭和 42 年 1 月 15 日）
　　　　　教科書　新編　高等学校　数学ⅡB

（静岡県立 沼津東高等学校）