複素数と極・極線（その２）

岡(おか)　多賀彦(たかひこ)

第４章　自己極線三角形

[1]　単位円の周上の異なる４点を結んでできる図形

単位円の周上に異なる４点 A，B，C，D をとる．

２本の直線 AB と CD の交点をPとすると，(4)（注 参照）から

$$p+ab\overline{p}=a+b \quad \cdots\cdots ①$$

$$p+cd\overline{p}=c+d \quad \cdots\cdots ②$$

となる．①，② から，p を消去して整理すると，

$$\overline{p}=\frac{a+b-c-d}{ab-cd} \quad \cdots\cdots (11)$$

となる．

同様に，別な結び方をして，２本の直線 AC と BD の交点をQ，２本の直線 AD と BC の交点をRとすると，

$$\overline{q}=\frac{a+c-b-d}{ac-bd},$$

$$\overline{r}=\frac{a+d-b-c}{ad-bc} \quad \cdots\cdots (11)'$$

となる．

次に，２つの交点QとRを結ぶ直線の方程式を求める．

(2) から

$$(\overline{r}-\overline{q})z-(r-q)\overline{z}=q\overline{r}-\overline{q}r \quad \cdots\cdots ③$$

また，(11)′ から

$$\overline{r}-\overline{q}=\frac{(a-b)(c-d)(a+b-c-d)}{(ac-bd)(ad-bc)} \quad \cdots\cdots ④$$

$$q\overline{r}-\overline{q}r=\frac{2(a-b)(c-d)(ab-cd)}{(ac-bd)(ad-bc)} \quad \cdots\cdots ⑤$$

となる．

④，⑤ を ③ に代入して，整理すると

$$\frac{a+b-c-d}{ab-cd}z+\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}\overline{z}=2$$

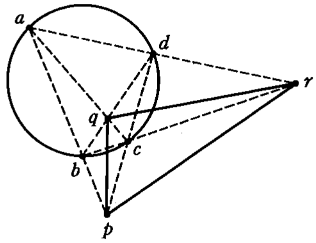
$\overline{z}$ の係数を z の係数の共役複素数で表すと，

$$\frac{a+b-c-d}{ab-cd}z+\overline{\left(\frac{a+b-c-d}{ab-cd}\right)}\overline{z}=2 \quad \cdots\cdots (12)$$

または，(11) で求めた交点Pに対応する複素数 p で表すと，

$$\overline{\overline{p}z+p\overline{z}=2}$$

となる．

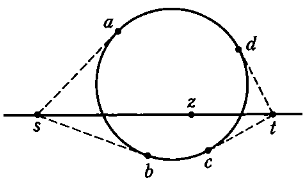


(11)，(12) は，残りの２つの交点QとRを結ぶ直線がはじめの交点Pを極とする極線になっていることを示している．

同様に，(11)，(12) における４つの複素数 a，b，c，d に関する対称性から，直線 RP は交点Qを，直線 PQ は交点Rを，それぞれ極とする極線になっている．

このことが，一般の２次曲線でも成り立っていることは射影幾何学から知られている．そこで，２次曲線の上の異なる４つの点を交互に結んでできる３つの交点がつくる三角形を「自己極線三角形」という．[5)]

[2]　単位円の周上の４点で引いた２組の接線の交点を結ぶ直線



単位円の周上の2組の2点AとB，CとDで引いた接線の交点をS，Tとする．

(7) から

$$\bar{s}=\frac{2}{a+b} \quad \cdots\cdots ①$$

$$\bar{t}=\frac{2}{c+d} \quad \cdots\cdots ②$$

となる．①，②から

$$\bar{t}-\bar{s}=2\frac{a+b-c-d}{(a+b)(c+d)} \quad \cdots\cdots ③$$

$$s\bar{t}-\bar{s}t=4\frac{ab-cd}{(a+b)(c+d)} \quad \cdots\cdots ④$$

となる．

次に，2つの交点SとTを結ぶ直線の方程式を求める．

(2) から

$$(\bar{t}-\bar{s})z-(t-s)\bar{z}=s\bar{t}-\bar{s}t \quad \cdots\cdots ⑤$$

となる．③，④を⑤に代入して整理すると，

$$\frac{a+b-c-d}{ab-cd}z+\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}\bar{z}=2$$

$\bar{z}$ の係数を z の係数の共役複素数で表して，

$$\frac{a+b-c-d}{ab-cd}z+\overline{\left(\frac{a+b-c-d}{ab-cd}\right)}\bar{z}=2 \quad \cdots\cdots (13)$$

となる．

ところで，(12) と (13) が一致するので，2組の2点AとB，CとDで引いた接線の交点S，Tを通る直線は[1]で議論した「自己極線三角形」における頂点Pに対する対辺QRが乗っている直線（極Pに対する極線QR）と同一の直線である．

第5章　パスカルの定理とブリアンションの定理

[1]　パスカルの定理

単位円の周上に異なる6点A，B，C，D，E，Fをとる．2直線ABとDEの交点をS，2直線BCとEFの交点をTとする．

(11) から

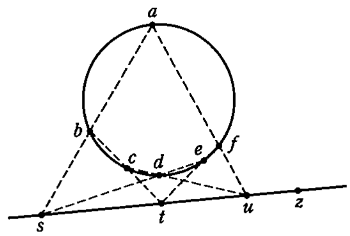
$$\bar{s}=\frac{a+b-d-e}{ab-de},\quad \bar{t}=\frac{b+c-e-f}{bc-ef} \quad \cdots\cdots ①$$

となる．①から

$$\bar{t}-\bar{s}=\frac{(b-e)(ab+cd+ef-de-fa-bc)}{(ab-de)(bc-ef)} \quad \cdots\cdots ②$$

$$\begin{aligned}s\bar{t}-\bar{s}t=&-\frac{b-e}{(ab-de)(bc-ef)}\\&\times\{(a+b)de+(c+d)fa+(e+f)bc\\&-(d+e)ab-(f+a)cd-(b+c)ef\}\end{aligned} \quad \cdots\cdots ③$$

となる．



次に，2つの交点SとTを結ぶ直線の方程式を求める．

(2) から

$$(\bar{t}-\bar{s})z-(t-s)\bar{z}=s\bar{t}-\bar{s}t \quad \cdots\cdots ④$$

となる．②，③を④に代入して整理すると，

$$\underline{\bar{k}z+k\bar{z}=2} \quad \cdots\cdots (14)$$

ここで，

$$\bar{k}=\frac{2(ab+cd+ef-de-fa-bc)}{ab(d+e)+cd(f+a)+ef(b+c)-de(a+b)-fa(c+d)-bc(e+f)} \quad \cdots\cdots (15)$$

となる．

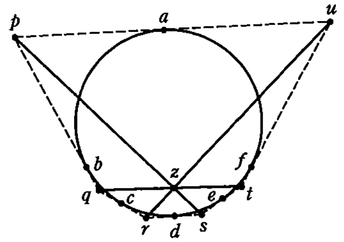
(15) は6つの複素数 a，b，c，d，e，f についてサイクリックになっているので，残る2直線CDとFAの交点Uもまた (14) で与えられる直線STの上にある．

これら3つの交点S，T，Uが1本の直線の上にあることを「パスカルの定理」，またこの直線を「パスカル線」という．

ちなみに，これまで「パスカルの定理」の証明は与えられていたが，「パスカル線」の具体的な形は示されていなかった．[3)4)]

[2]　ブリアンションの定理

単位円の周上に異なる6点A，B，C，D，E，Fをとる．2組の2点AとB，DとEで引いた接線の交点をP，Sとし，それらを結ぶ直線PSを引く．



一方，別の2組の2点BとC，EとFで引いた接線の交点をQ，Tとし，それらを結ぶ直線QTを引く．

(13) から

$$\frac{a+b-d-e}{ab-de}z+\frac{ab(d+e)-de(a+b)}{ab-de}\bar{z}=2 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\frac{b+c-e-f}{bc-ef}z+\frac{bc(e+f)-ef(b+c)}{bc-ef}\bar{z}=2 \qquad \cdots\cdots ②$$

となる．

次に，これらの2直線の交点 z を求める．

①，② から z を消去し整理すると，交点に対応する共役複素数は

$$\bar{z}=\frac{2(ab+cd+ef-de-fa-bc)}{ab(d+e)+cd(f+a)+ef(b+c)-de(a+b)-fa(c+d)-bc(e+f)} \qquad \cdots\cdots (16)$$

となる．

(16) は複素数 a，b，c，d，e，f についてのサイクリックになっているので，残る2組の2点CとD，FとAで引いた接線の交点R，Uを結ぶ直線も，また (16) で与えられる2直線PSとQTの交点を通る．これを「ブリアンションの定理」という．

ところで，(15) の $\bar{k}$ と (16) の $\bar{z}$ の内容が一致するので，「ブリアンションの定理」における3直線の交点を極とするとき，「パスカルの定理」における3交点を通る直線はそれに対応する極線になっている．

第6章　惑星が円軌道を運動するときの中心力

太陽が単位円の中心O以外の点Sにあって，ある惑星がその円周上を運動していると仮定する．

ある時刻に点Pにあったその惑星が，微小時間 Δt の後に，点Qに移った．

もし，太陽からの引力がなければ，惑星は点Pで引かれた接線

$$\bar{p}z+p\bar{z}=2$$

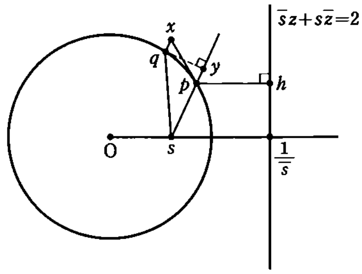
の上を等速直線運動するが，太陽からの引力を受けているので，点Qを通り線分SPに平行な直線

$$(\bar{p}-\bar{s})z-(p-s)\bar{z}=(\bar{p}-\bar{s})q-(p-s)\bar{q}$$

とし，両者の交点をXとするとき，線分QX

$$x-q=\frac{(p-s)(\bar{p}-\bar{q})(p-q)}{2-\bar{s}p-s\bar{p}} \qquad \cdots\cdots ①$$

の大きさだけ太陽に向けて落下する．



一方，中心力のみが働いているとき面積速度 V_s 一定の法則が成り立つので，惑星の動径SPが描く扇形に似た図形SPQの面積（極限では△SPQの面積）は，所要時間 Δt に比例する．点Qから直線SPに下ろした垂線の足をYとするとき，

$$y-q=\frac{(\bar{q}-\bar{s})(p-s)-(q-s)(\bar{p}-\bar{s})}{2(\bar{p}-\bar{s})}$$

から，

$$i\times\Delta\mathrm{SPQ}=\frac{1}{2}(\bar{p}-\bar{s})(y-q)$$

$$=\frac{1}{4}\{(\bar{q}-\bar{s})(p-s)-(q-s)(\bar{p}-\bar{s})\}$$

$$=\frac{1}{4}(p-q)\left\{(\bar{q}-\bar{s})+\frac{\bar{p}}{q}(q-s)\right\} \qquad \cdots\cdots ②$$

と表される．

①，② から，落下の加速度の大きさは

$$a=2V_s^2\times\lim_{q\to p}\frac{|x-q|}{|i\cdot\varDelta\mathrm{SPQ}|^2}=32V_s^2$$

$$\times\lim_{q\to p}\frac{|p-s|}{|2-\bar{s}p-s\bar{p}|\cdot\left|(\bar{q}-\bar{s})+\dfrac{\bar{p}}{q}(q-s)\right|^2}\quad\cdots\cdots ③$$

と表される．

ところで，点Pから極Sに対する極線

$$\bar{s}z+s\bar{z}=2$$

に下ろした垂線

$$\bar{s}z-s\bar{z}=\bar{s}p-s\bar{p}$$

の足をHとするとき，

$$h-p=\frac{2-\bar{s}p-s\bar{p}}{2\bar{s}}$$

となる．

したがって，落下の加速度の大きさ③は，

$$a=32V_s^2\times\frac{|p-s|}{|2-\bar{s}p-s\bar{p}|^3}$$

$$=\frac{4V_s^2}{|s|^3}\times\frac{|p-s|}{|h-p|^3}\quad\cdots\cdots ④$$

となる．太陽が円の中心以外の点Sにあって，惑星がその円周上を運動するとき，向心力は $\dfrac{\mathrm{SP}}{\mathrm{PH}^3}$ に比例する．[7)]

特に，太陽が円周上にあるとき，

$$s\bar{s}=1$$

$$2-\bar{s}p-s\bar{p}=-\frac{(p-s)^2}{sp}$$

から，④は

$$a=32V_s^2\times\frac{1}{|p-s|^5}$$

となって，向心力は太陽と惑星との距離SPの5乗に反比例する．[6)]

末尾ながら，城山義光先生を始めとする大阪高等学校数学教育会，鬼塚史朗先生を始めとする大阪府高等学校理化教育研究会の仲間の友情に感謝する．

参考文献

1) 矢野健太郎，平面解析幾何学（基礎数学選書2）　裳華房　1969年

2) 岡　多賀彦，放物線 $y=x^2$ の極・極線（数研通信 No. 7）　数研出版　1989年

3) 片山　孝次，複素数の幾何学（数学入門シリーズ3）　岩波書店　1982年

4) 高橋　正明，複素数（モノグラフ13）　科学新興社　1968年

5) 福原満州雄，射影幾何　実教出版　1985年

6) ニュートン，自然哲学の数学的原理（世界の名著）　中央公論社　1971年

7) 堀　源一郎，太陽系（岩波新書）　岩波書店　1976年

（兵庫県　灘高等学校）

編集部注：前号から引用した式について

点A, B, Cなどについて，対応する複素数を a, b, c で表すとき

▶ 2点AとBを通る直線の方程式

3つの複素数 a, b, z について

$$(\bar{b}-\bar{a})z-(b-a)\bar{z}=a\bar{b}-\bar{a}b\quad\cdots\cdots(2)$$

▶単位円の周上の異なる2点AとBを通る割線の方程式

$$z+ab\bar{z}=a+b\quad\cdots\cdots(4)$$

▶単位円の周上の異なる2点A，Bで引いた接線の交点に対応する共役複素数

$$\bar{z}=\frac{2}{a+b}\quad\cdots\cdots(7)$$

詳しくは 数研通信 No. 14「複素数と極・極線（その1）」をご参照下さい．

※ 申し訳ございませんが，以下の文章におきまして誤りがございました．お詫びして訂正させていただきます．

訂　正

数研通信 No. 7，p. 15 右3行目の「$\dfrac{m}{2V_s^2}$」を「$2mV_s^2$」に変える．次の行も同様にする．

数研通信 No. 13，p. 7 右13行目を「$=\alpha^nE+n\alpha^{n-1}(A-\alpha E)$」に変える．

数研通信 No. 14，p. 8 右22行目の(6)を(5)に，24行目の(5)を(6)に変える．