「微分・積分」と　複素数

小原　實晃（おはら　じっこう）

1．はじめに

「微分・積分」といえば，数学の中でも極めて実数的な分野であり，実数の連続性の上に成り立つ理論体系であるといえよう（あるいは，実数の連続性の“表現”とさえいえるのではないか）．

ところが，実際に授業してみると，あちこちに虚数が顔をのぞかせるのである．大袈裟にいうならば「実数の世界は複素数の世界の“切り口”である」という感じさえすることがある．

この1年，3年生の理系クラスで「微分・積分」を教え，大変楽しい思いをした（数研出版「高等学校微分・積分（037)」を用いた．以下「037」と略称して引用する）．

生徒の質問や意見をきっかけに「複素数」をもち出すことがたびたびあり，そのたびに，彼らは強い関心を示し興味をもった．

《例》　不定積分と原始関数

連続関数 $f(x)$ の不定積分（積分関数）$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数である．つまり

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \text{ のとき } F'(x)=f(x)$$

「$f(x)$ が連続関数である限りは

不定積分 ⟷ 原始関数

となり，いわゆる微分と積分との完全な逆関係が成立するのである」

ところが，Oさんは次の事実を発見した．

いま，$G(x)=x^2-2x+3$　……①

とすると，$G'(x)=2x-2$ であるが，

$f(x)=2x-2$ のとき

$$G(x)=\int_a^x f(t)\,dt \quad \cdots\cdots ②$$

とは表せない．つまり，$f(x)$ の原始関数 $G(x)$ は不定積分で表せないのである！

② の右辺は

$$\int_a^x (2t-2)\,dt=x^2-2x-(a^2-2a)$$

であるから，① より $-(a^2-2a)=3$

$a^2-2a+3=0$　ゆえに $a=1\pm\sqrt{2}\,i$

このような a は x 軸上には存在しない，というわけである．

Oさんの“発見”を紹介したら，K君は

$f(x)=\cos x$，$G(x)=\sin x-2$　……③

でも同じことが起こるといって来た．

（頁数の都合で経過は省くが）② を「複素積分」と考えると，次のように ① を ② で表すことができるのだ，ということを話した．

定理　$f(z)$：連続，$F(z)$：正則

$F'(z)=f(z)$

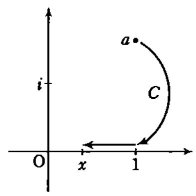
ならば，α から β への任意の道 C に対して

$$\int_C f(z)\,dz=\int_\alpha^\beta f(z)\,dz=F(\beta)-F(\alpha)$$

この定理を用いれば，② は

$a=1+\sqrt{2}\,i$

とおいて，



$$G(x)=\int_C f(z)\,dz=\int_a^x f(z)\,dz$$

$$=\int_a^1 (2z-2)\,dz+\int_1^x (2z-2)\,dz$$

$$=x^2-2x+3$$

すなわち，① が ② の形で表せた．

［注1］　③ も同様である．

$\sin a=2$ より，オイレルの公式を用いて

$$(e^{ia})^2-4ie^{ia}-1=0$$

ゆえに $e^{ia}=2i\pm\sqrt{(2i)^2+1}=(2\pm\sqrt{3})i$

$ia=\log(2\pm\sqrt{3})i$

$=\log(2\pm\sqrt{3})+i\arg(2\pm\sqrt{3})i$

$=\log(2\pm\sqrt{3})+i\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)$

$n=0$ のとき $a=\dfrac{\pi}{2}-i\log(2\pm\sqrt{3})$

この a に対して，③ は

$$G(x)=\int_a^x \cos z\,dz=\sin x-2$$

と表せる.

［注 2］ **オイレルの公式** について；

オイレルの公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$ の導き方はいろいろある．いろいろの導き方があるということは，この公式が解析学の土台のところにある「真理」であることを物語る．どの導き方も高校レベルでは完全に合理化することは無理かと思うが，「確率・統計」の中の天下り定理よりは，はるかに合理的である（次に導き方の例を示す）.

《例》 次の定理は完全に証明できる.

定理 微分可能な関数 $f(x)$ について

$$\left.\begin{array}{l} f(x+y)=f(x)f(y) \\ f(0)\neq 0,\ f'(0)=k \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \boxed{f(x)=e^{kx}}$$

（証明） 略

この定理を用いると ―――

$f(x)=\cos x+i\sin x$ とおく.

$$\begin{aligned} f(x+y)&=\cos(x+y)+i\sin(x+y) \\ &=(\cos x+i\sin x)(\cos y+i\sin y) \\ &=f(x)f(y) \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

$f(0)=1\neq 0$ …… ②

$f'(x)=-\sin x+i\cos x,\ f'(0)=i$ …… ③

①, ②, ③ から $f(x)=e^{ix}$

すなわち $\cos x+i\sin x=e^{ix}$

［注 3］ i^i について；

$a^x=e^{x\log_e a}$ であることはよく知っている.

そこで，α, β が複素数のときも

$$\alpha^\beta=e^{\beta\log\alpha}$$

と定義する．また，注 1 でも用いたように $\log\alpha=\log|\alpha|+i\arg\alpha$ である（途中は省く）から

$$i^i=e^{i\log i}=e^{i\cdot\frac{\pi}{2}i}=e^{-\frac{\pi}{2}}$$

授業では，その他に数ヶ所で「複素数」をもち出したのだが，以下に，2 つだけ紹介することにする（頁数の関係で徹底して途中を端折ることになるが悪しからず）．また，このような実践は，生徒と私の〝共同作業〟の中から必然性をもって現れたものなのであって，決して「教育上意義あり」などというつもりはない.

2．双曲線関数と円関数

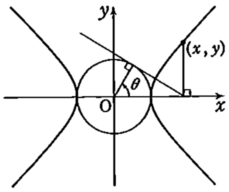
「微分・積分」の中で，パラメータ表示の占めるウエイトは大きい.

物理学への応用である「平面運動」は時刻 t がパラメータであり，また重要な曲線（サイクロイドなど）にはパラメータ表示によるしかないものが多い.

当然のこととして「2 次曲線」のパラメータ表示が話題になる（パラメータ表示については「037」が最も充実している）.

$$F(x,\ y)=0 \iff \begin{cases} x=f(\theta) \\ y=g(\theta) \end{cases}$$

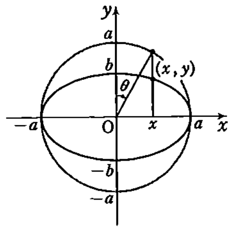
その場合「θ をどこにとるか」が気になるところである．たとえば



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{\cos\theta} \\ y=b\tan\theta \end{cases}$$



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

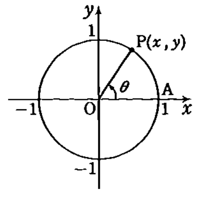
$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x=a\sin\theta \\ y=b\cos\theta \end{cases}$$

θ の別のとり方を考えよう，ということで，双曲線関数と楕円関数をとり上げてみた.

(1) 双曲線のパラメータ表示

円のパラメータ表示について見直す.



$$x^2+y^2=1$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$$

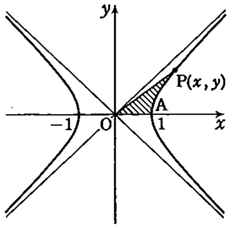
θ は動径 OP に属する一般角.

ところが θ には他に次の 2 つの意味がある.

すなわち，扇形 OAP の面積を S，弧 AP の長さを l とすると

$$\theta=2S,\quad \theta=l$$

$\theta=2S$ に着目すると双曲線関数，$\theta=l$ に着目すると楕円関数が出る（後者については $p.$ 8 参照）.



$$x^2-y^2=1$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{cases} x=\boxed{\ f(\theta)\ } \\ y=\boxed{\ g(\theta)\ } \end{cases}$$

扇形 OAP の面積をSとすると

$$S=\frac{1}{2}xy-\int_1^x\sqrt{t^2-1}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}xy-\left[\frac{1}{2}t\sqrt{t^2-1}-\frac{1}{2}\log(t+\sqrt{t^2-1}\,)\right]_1^x$$
$$=\frac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2-1}\,)$$

$\theta=2S$ とおくと $\theta=\log(x+\sqrt{x^2-1}\,)$

よって　　$x+\sqrt{x^2-1}=e^\theta$

ゆえに　　$x-\sqrt{x^2-1}=e^{-\theta}$

したがって　$x=\dfrac{1}{2}(e^\theta+e^{-\theta})=f(\theta)$

また　　$y=\dfrac{1}{2}(e^\theta-e^{-\theta})=g(\theta)$

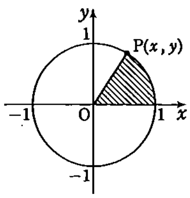
（θを負に拡張する話は省略）

ここに現れた $f(\theta)$，$g(\theta)$ をそれぞれ双曲余弦 (hyperbolic cosine)，双曲正弦 (hyperbolic sine) といい，$\cosh\theta$，$\sinh\theta$ と表す．また

双曲正接　　$\tanh\theta=\dfrac{\sinh\theta}{\cosh\theta}=\dfrac{e^\theta-e^{-\theta}}{e^\theta+e^{-\theta}}$

［注1］ 同じことを円の場合にもやってみる．

$$S=\frac{1}{2}xy+\int_x^1\sqrt{1-t^2}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}xy+\left[\frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2}+\frac{1}{2}\sin^{-1}t\right]_x^1$$
$$=\frac{1}{2}\sin^{-1}1-\frac{1}{2}\sin^{-1}x$$



$\theta=2S$　から　　$\theta=\dfrac{\pi}{2}-\sin^{-1}x$

よって　　$\sin^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}-\theta$

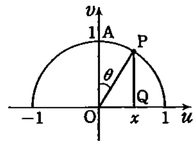
ゆえに　　$x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

［注2］ 逆三角関数について；

問題 (1) 定積分によって面積が表されることを利用して $\displaystyle\int_0^x\sqrt{1-u^2}\,du=\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+\sin^{-1}x)$ が成り立つことを示せ．ただし $0\leqq x\leqq 1$ とし $\sin\theta=x$ となる鋭角θを $\sin^{-1}x$ で表す．

(2) $f(x)=\sin^{-1}x$ とするとき，上の式を利用して $f'(x)$ を求めよ．

（解） (1) uを横軸にとると $v=\sqrt{1-u^2}$ は図のような半円を表す．よって



$$\int_0^x\sqrt{1-u^2}\,du$$
$$=\triangle\mathrm{OPQ}+扇形\ \mathrm{OAP}=\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\theta$$

ところが $\sin\theta=x$ から $\theta=\sin^{-1}x$

したがって，与式は成り立つ．

(2) (1) から

$$\int_0^x\sqrt{1-u^2}\,du=\frac{1}{2}\{x\sqrt{1-x^2}+f(x)\}$$

両辺をxで微分して

$$\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{1-x^2}+\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}+f'(x)\right\}$$

よって $f'(x)=\sqrt{1-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

［注3］ 上の (2) から

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\sin^{-1}x+C$$

また，(1) から

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^x\sqrt{1-u^2}\,du+C$$
$$=\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\sin^{-1}x+C$$

(2) 双曲線関数と円関数の不定積分

逆双曲線関数も導いておこう．

$f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\cosh x=y$　$(y\geqq 1)$

これをxについて解くと

$(e^x)^2-2ye^x+1=0$

$e^x=y\pm\sqrt{y^2-1}$　∴ $x=\log(y\pm\sqrt{y^2-1}\,)$

＋のほうをとり，xとyを入れかえて

$$f^{-1}(x)=\log(x+\sqrt{x^2-1}\,)=\cosh^{-1}x$$

同様に　$g(x)=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\sinh x=y$　から

$e^x=y+\sqrt{y^2+1}$　ゆえに $x=\log(y+\sqrt{y^2+1}\,)$

$$g^{-1}(x)=\log(x+\sqrt{x^2+1}\,)=\sinh^{-1}x$$

逆双曲正接は

$$\tanh x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=y\ (|y|<1)\ から$$

$$e^{2x}=\frac{1+y}{1-y}\quad よって\quad x=\frac{1}{2}\log\frac{1+y}{1-y}$$

したがって　$\tanh^{-1}x=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}$

下の表は，円関数と双曲線関数にかかわる不定積分をまとめたものである．

$$x+\sqrt{x^2\pm1}=t\quad または\quad x=\frac{1}{2}(e^t\mp e^{-t})$$

とおく置換積分の計算演習としてやらせているものである．(右辺を微分してもよい！)

円関数	双曲線関数
$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sin^{-1}x+C$	$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\sinh^{-1}x+C$
	$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx=\cosh^{-1}x+C$
$\displaystyle\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+\sin^{-1}x)+C$	$\displaystyle\int\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2}+\sinh^{-1}x)+C$
	$\displaystyle\int\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1}-\cosh^{-1}x)+C$
$\displaystyle\int\frac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}x+C$	$\displaystyle\int\frac{1}{1-x^2}dx=\tanh^{-1}x+C$

(3) 不定積分の公式の統一

上の公式集をみて，生徒は「気持ちが悪い」という．左と右は一見，全然無関係にみえるが，よくみると片方から他方が出るのではないかと思わせるぐらいよく似ている．

大胆に統一をめざそう．

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-(ix)^2}}=\frac{1}{i}\int\frac{i\,dx}{\sqrt{1-(ix)^2}}\qquad(ix=\theta)$$

$$=\frac{1}{i}\int\frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}=\frac{1}{i}\sin^{-1}\theta=\frac{1}{i}\sin^{-1}(ix)\qquad\cdots\cdots ①$$

オイレルの公式から

$$\sin^{-1}z=i\log(-iz+\sqrt{1-z^2})$$

よって $①=\dfrac{1}{i}\{i\log(-i(ix)+\sqrt{1-(ix)^2})\}$

$$=\log(x+\sqrt{1+x^2})=\sinh^{-1}x$$

左を用いて右を導いたわけである！　つまり，左があれば，右は不要 —— というより

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-\varepsilon x^2}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sin^{-1}(\sqrt{\varepsilon}\,x)\qquad(\varepsilon=\pm1)$$

によって，左右が統一できたことになる．同様に，

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\int\frac{dx}{1+(ix)^2}=\frac{1}{i}\int\frac{i\,dx}{1+(ix)^2}$$

$$=\frac{1}{i}\int\frac{d\theta}{1+\theta^2}$$

$$=\frac{1}{i}\tan^{-1}\theta=\frac{1}{i}\tan^{-1}(ix)\qquad\cdots\cdots ②$$

オイレルの公式から

$$\tan^{-1}z=\frac{1}{2i}\log\frac{1+iz}{1-iz}$$

ゆえに $②=\dfrac{1}{i}\dfrac{1}{2i}\log\dfrac{1+i(ix)}{1-i(ix)}=-\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1-x}{1+x}$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}=\tanh^{-1}x$$

やはり左を用いて右を導いたのである．すなわち

$$\int\frac{dx}{1-\varepsilon x^2}=\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}\log\frac{1+\sqrt{\varepsilon}\,x}{1-\sqrt{\varepsilon}\,x}\qquad(\varepsilon=\pm1)$$

によって，左右が統一できたことになる．

［注1］　$w=\sin^{-1}z\Longleftrightarrow\sin w=z$

$\sin w=\dfrac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}$ から $2iz=\dfrac{1}{e^{-iw}}-e^{-iw}$

ゆえに $(e^{-iw})^2+2ize^{-iw}-1=0$

よって $e^{-iw}=-iz+\sqrt{1-z^2}$

$-iw=\log(-iz+\sqrt{1-z^2})$

ゆえに $w=\sin^{-1}z=i\log(-iz+\sqrt{1-z^2})$

$z=\tan w=\dfrac{\sin w}{\cos w}=\dfrac{1}{i}\dfrac{e^{2iw}-1}{e^{2iw}+1}$ から

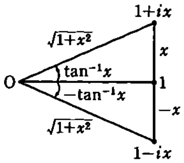
$e^{2iw}=\dfrac{1+iz}{1-iz}$　よって $w=\dfrac{1}{2i}\log\dfrac{1+iz}{1-iz}$

ゆえに $w=\tan^{-1}z=\dfrac{1}{2i}\log\dfrac{1+iz}{1-iz}$

［注 2］ 複素平面上で“微分する”のも面白い．

$$\log(1\pm ix)=\log|1\pm ix|+i\arg(1\pm ix)$$
$$=\log\sqrt{1+x^2}\pm i\tan^{-1}x$$

よって

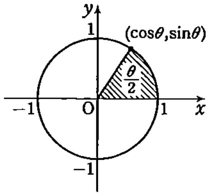


$$\frac{d}{dx}\log(1\pm ix)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}\pm\frac{i}{1+x^2}$$
$$=\frac{x\pm i}{1+x^2}=\frac{\pm i(1\mp ix)}{1+x^2}=\frac{\pm i}{1\pm ix}$$

また $\log\frac{1+ix}{1-ix}=\log\left|\frac{1+ix}{1-ix}\right|+i\arg\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)$
$$=\log 1+i\cdot 2\tan^{-1}x=2i\tan^{-1}x$$

よって $\int\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{2i}\int\left(\frac{i}{1+ix}-\frac{-i}{1-ix}\right)dx$
$$=\frac{1}{2i}\log\frac{1+ix}{1-ix}=\frac{1}{2i}2i\tan^{-1}x=\tan^{-1}x$$

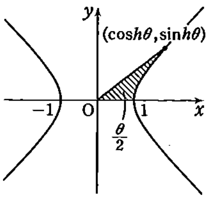
［注 3］ 円関数と双曲線関数の“双対性”



$x^2+y^2=1$

$\underbrace{(x+iy)}_{e^{i\theta}}(x-iy)=1$

$\boxed{e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta}$

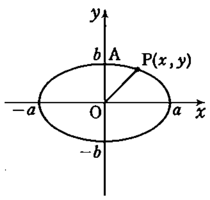


$x^2-y^2=1$

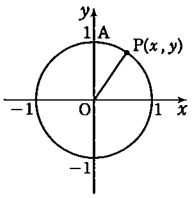
$\underbrace{(x+y)}_{e^{\theta}}(x-y)=1$

$\boxed{e^{\theta}=\cosh\theta+\sinh\theta}$

［注 4］ だ円のパラメータ表示（入り口のみ紹介）



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\Updownarrow\quad \overset{\frown}{\mathrm{AP}}=\theta$$
$$\begin{cases} x=\boxed{\varphi(\theta)} \\ y=\boxed{\phi(\theta)} \end{cases}$$



$$y=\sqrt{1-x^2}$$
$$\overset{\frown}{\mathrm{AP}}=\int_0^x\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$
$$=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$=\sin^{-1}x$$

$\overset{\frown}{\mathrm{AP}}=\theta$ とすると $\sin^{-1}x=\theta$　よって $x=\sin\theta$

3．ニュートンの微分方程式

2学期で「微分・積分」「確率・統計」をおわってしまうので，3学期は「数学総合演習」になる．

私は「ケプラーからニュートンへ」という表題で，「ケプラーの3法則」を運動方程式を用いて数学的に導く過程を考察させることにしている．

その中で，次の形の微分方程式を解くことが必要となるので，2学期の「微分・積分」で必ずこの方程式を扱う．

$$\frac{d^2y}{dx^2}+ay=0\quad(a>0)$$

（解） 両辺に $2\frac{dy}{dx}$ を掛けると

$$2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}+2ay\frac{dy}{dx}=0,\quad \frac{d}{dx}\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+ay^2\right\}=0$$

よって $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+ay^2=C$ （Cは積分定数）

$$\therefore\ \frac{1}{\sqrt{C-ay^2}}\cdot\frac{dy}{dx}=\pm1\ (C>ay^2\geqq 0)$$

$$\int\frac{dy}{\sqrt{C-ay^2}}=\pm\int dx \quad \cdots\cdots ①$$

左辺は $y=\sqrt{\frac{C}{a}}\cos\theta$ とおくと $-\frac{1}{\sqrt{a}}\int d\theta$

ゆえに，① から　$\theta=\pm(\sqrt{a}\,x+C')$

したがって　$y=\sqrt{\frac{C}{a}}\cos(\sqrt{a}\,x+C')$

加法定理により　$y=C_1\cos\sqrt{a}\,x+C_2\sin\sqrt{a}\,x$

（C_1, C_2 は任意定数）

(1) 「037」*p.* 157 練習 11 をめぐって

練習 11　k を定数とするとき，関数 $y=\alpha e^{kx}+\beta e^{-kx}$ について，定数 α, β を消去せよ．

答は簡単で，$y''-k^2y=0$ が得られる．

授業では「逆」も扱う．上と同様にして

$$\int\frac{dy}{\sqrt{y^2+A}}=\pm k\int dx\quad\begin{pmatrix}Ak^2=C\\ C>-k^2y^2\end{pmatrix}$$

よって $y+\sqrt{y^2+A}=Be^{\pm kx}$ $(B>0)$

ゆえに $y-\sqrt{y^2+A}=-\frac{A}{B}e^{\mp kx}$

したがって　$y=C_1e^{kx}+C_2e^{-kx}$

（C_1, C_2 は任意定数）

（$y=e^{-kx}u$, $u'=v$ とおくと $v'-2kv=0$
$v=Ce^{2kx}$ …… この方法でも解ける）

以上をまとめると，$y''+ay=0$ の解は

(i) $a>0$ のとき $y=C_1\cos\sqrt{a}\,x+C_2\sin\sqrt{a}\,x$

(ii) $a<0$ のとき $y=C_1e^{\sqrt{-a}x}+C_2e^{-\sqrt{-a}x}$

生徒から「2つの方程式は本質的に同じように感じるのに，解が全く無関係に見えるのは，どうも不思議だ」というニュアンスの意見が出た．

(2)　$y''+ay=0$ の解の統一

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-ay \iff \begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=z\\[2mm] \dfrac{dz}{dx}=-ay\end{cases} \quad \cdots\cdots ①$$

そこで，連立1階微分方程式の理論にあてはめる．

$$① \iff \begin{cases}y'=0\cdot y+1\cdot z\\ z'=-ay+0\cdot z\end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix}=L\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix},\ L=\begin{pmatrix}0&1\\-a&0\end{pmatrix} \cdots ②$$

$\det(L-\lambda E)=0$ より $\lambda^2+a=0$

$$\lambda=\pm\sqrt{-a}$$

② の解は $\begin{cases}y=C_1e^{\sqrt{-a}x}+C_2e^{-\sqrt{-a}x}\\ z=C_1'e^{\sqrt{-a}x}+C_2'e^{-\sqrt{-a}x}\end{cases}$

ここでは y の方だけとればよい．

さて，$a>0$ のとき，$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$ であるから

$$y=C_1e^{\sqrt{a}ix}+C_2e^{-\sqrt{a}ix} \quad \cdots\cdots ③$$

また，このときは，理論により，A, B を実数として，　$C_1=A+Bi$, $C_2=A-Bi$　とおけるから，③ にオイレルの公式を用いると

$$y=(C_1+C_2)\cos\sqrt{a}\,x+(C_1i-C_2i)\sin\sqrt{a}\,x$$
$$=2A\cos\sqrt{a}\,x-2B\sin\sqrt{a}\,x$$

したがって，「ニュートンの解」に到達した．

すなわち，上の (i), (ii) は統一されて，a の正負にかかわりなく，$y''+ay=0$ の解は

$$y=C_1e^{\sqrt{-a}x}+C_2e^{-\sqrt{-a}x} \quad \text{である}$$

ということになった．

［注1］　固有値問題とのかかわり；

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-ay$　を　$\dfrac{d^2}{dx^2}y=\lambda y$ とみると，

「代数・幾何」で学んだ，固有値・固有ベクトルのことと同じようなことが考えられる．

$$M:\ \vec{v}\longrightarrow M\vec{v}=\lambda\vec{v}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}:\ y\longrightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=Dy=\lambda y$$

M が「対称行列」のときは，必ず

$$M\vec{e}_j=\lambda_j\vec{e}_j,\ (\vec{e}_i,\ \vec{e}_j)=\delta_{ij}\ (i,\ j=1,\ 2,\ 3)$$

$$L^{-1}ML=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix},\ {}^tL=L^{-1}$$

とできる．すなわち，固有ベクトルから成る正規直交基底が存在する．（オリジナル「代数・幾何」にはこのレベルの問題が入っている！）

$$\mathrm{V}=\left\{f\ \middle|\ \begin{matrix}f\in C^2[-\pi,\ \pi]\\ f(-\pi)=f(\pi),\ f'(-\pi)=f'(\pi)\end{matrix}\right\}$$

という線形空間に，内積を

$$(f,\ g)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\,dx$$

によって導入すると，D は M と同じ性質をもつ．

$$(Df,\ g)=(f,\ Dg)$$

このことから，M のときと全く同様に，D について次のことが出てくる．

$Df=\lambda f$ $(f\neq 0)$ を満たす λ は実数．

異なる固有値に対応する固有関数は直交する．

V の中での固有関数と固有値をすべて求めてみる．

$Df-\lambda f=0$ から，一般解は

$$f(x)=C_1e^{\sqrt{\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

$f\in\mathrm{V}$ から $e^{2\sqrt{\lambda}\pi}=1$　ゆえに $2\sqrt{\lambda}\,\pi=2n\pi i$

$$\lambda=-n^2\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

$$f(x)=C_1e^{inx}+C_2e^{-inx}$$
$$=(C_1+C_2)\cos nx+i(C_1-C_2)\sin nx$$
$$=A\cos nx+B\sin nx\quad\in\mathrm{V}$$

すなわち，D の固有関数は

a_0, $a_1\cos x$, $b_1\sin x$, $a_2\cos 2x$, $b_2\sin 2x$, $\cdots\cdots$

さて，M のときは，R^3 の元 $\vec{v}$ は全て

$$\vec{v}=x\vec{e_1}+y\vec{e_2}+z\vec{e_3}\quad x,\ y,\ z\in\mathrm{R}$$

の形で一意的にかける．

すると，V の元 f はすべて

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

の形に表せるのではないか？

［注2］　フーリエ級数論をバックにもつ問題は入試でも多く出題されている．（'88 九州工大，'89 岩手大，'91 香川医大 等）

双曲線関数についても，関数方程式などに関連して非常に多く出題されている．（授業でもとり上げているし，「037」でも扱われている）

頁数の都合で端折った（割愛した）内容についても，機会があればまとめてみたいと考えている．

（千葉県立 千葉高等学校）