ある入試問題の拡張

仁平(にへい)　政一(まさかず)

1．はじめに

1991年2月の京都大学の入学試験に

> $0 \leqq a < \dfrac{\pi}{4}$，$0 \leqq b < \dfrac{\pi}{4}$ のとき
>
> $$\sqrt{\tan a \cdot \tan b} \leqq \tan\frac{a+b}{2} \leqq \frac{\tan a + \tan b}{2}$$
>
> を証明せよ．

という問題が出題された．

この不等式の右側は，凸関数ならば一般に成り立つことは周知のことである．ところで，左側の不等式についてはどうだろうか．

関数 $f(x)=x\ (x>0)$ に対しては同様な不等式が成立するが，一般に，どうなのかは，右側の不等式ほど，明らかではないように思われる．そこで，左側の不等式が成立するような関数を，なんらかの形で特徴づけることができないかと，興味がそそられた．以下そのことについて考察を進めてみよう．

2．不等式 $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geqq \sqrt{f(x)f(y)}$ を満たす関数

不等式

$$(*)\quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqq \sqrt{f(x)f(y)}$$

を満たす関数については，次の命題が成立する．

命題 1　関数 $f(x)$ は区間Ｉで正でありかつ連続とする．このとき，区間Ｉで $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geqq \sqrt{f(x)f(y)}$ が成立するための必要十分条件は
関数 $F(x)=\log f(x)$ が区間Ｉで上に凸であることである．ここに，log は自然対数．

証明　(⇒)　$f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geqq \sqrt{f(x)f(y)}$ の両辺に自然対数をとれば，

$$\log f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqq \frac{\log f(x)+\log f(y)}{2}$$

$F(x)=\log f(x)$　であるから，$^\forall x$，$^\forall y \in$Ｉに対して

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqq \frac{F(x)+F(y)}{2}$$

が成り立つ．
$f(x)$ は区間Ｉで連続であるから，$F(x)$ も区間Ｉで連続．よって，$F(x)=\log f(x)$ は上に凸．

(⇐)　連続関数 $F(x)$ が区間Ｉで上に凸ならば，$^\forall x$，$^\forall y \in$Ｉに対して

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqq \frac{F(x)+F(y)}{2}$$

ゆえに，

$$\log f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqq \frac{\log f(x)+\log f(y)}{2}$$

よって，

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqq \sqrt{f(x)f(y)} \qquad \square$$

定理 1　関数 $f(x)$ は区間Ｉで正でありかつ第2次導関数が存在するものとする．このとき，区間Ｉで

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geqq \sqrt{f(x)f(y)}$$

であるための必要十分条件は

$$f''(x)f(x) \leqq (f'(x))^2$$

が成り立つことである．

証明　$f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geqq \sqrt{f(x)f(y)}$ であるための必要十分条件は　$F(x)=\log f(x)$　が上に凸．これは $F''(x) \leqq 0$ と同値である．ゆえに，

$$F''(x)=\frac{f''(x)f(x)-\{f'(x)\}^2}{\{f(x)\}^2}\leqq 0$$

より，求める結果を得る． □

例 関数 $f(x)=\sin x\ (0<x<\pi)$，$\cos x\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ は与えられた区間で不等式（*）が成立する．また，関数 $f(x)=e^x$ のときは等号が成立する．

証明 定理 1 を適用すればよい． □

さて，関数 $f(x)=e^x$ ならば等号（すなわち $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)=\sqrt{f(x)f(y)}$）が成立するが，等号が成立するのは，この場合に限るだろうか．このことについては，次の命題が成立する．

命題 2 関数 $f(x)$ は R 上で正でありかつ連続とする．このとき，R 上で

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\sqrt{f(x)f(y)}$$

を満たす関数は $f(x)=ce^{\lambda x}$（$c>0$，λ はそれぞれ任意の定数）に限る．ここに，R は実数全体の集合．

証明 $F(x)=\log f(x)$ とおくと，

$$F\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{1}{2}(F(x)+F(y)) \quad \cdots\cdots ①$$

ここで，$x=s+t$，$y=s-t$ とおき，$G(s)=F(s)-F(0)$ とおくと，① は

$$F(s)-F(0)=\frac{1}{2}\{F(s+t)-F(0)\}+\frac{1}{2}\{F(s-t)-F(0)\}$$

と変形できるので

$$2G(s)=G(s+t)+G(s-t) \quad \cdots\cdots ②$$

を得る．いま，② で $s=0$ とおけば

$$G(t)+G(-t)=2G(0)=0$$

よって，

$$G(t)=-G(-t) \quad \cdots\cdots ③$$

② において，s と t を交換すると，

$$2G(t)=G(t+s)+G(t-s) \quad \cdots\cdots ④$$

④ に ③ を適用すると

$$2G(t)=G(s+t)-G(s-t) \quad \cdots\cdots ⑤$$

ゆえに，② と ⑤ から

$$G(s)+G(t)=G(s+t) \quad \cdots\cdots ⑥$$

ところで，関数が連続という条件のもとでの関数方程式 ⑥ の解は $G(s)=\lambda s$（λ は任意の定数）に限ることが知られているので，① を満たす連続関数は，$G(s)=F(s)-F(0)$ から

$$F(s)=\lambda s+F(0)$$

に限ることがわかる．

よって，$F(x)=\log f(x)$ であるから，$e^{F(0)}=c$（>0）とおきなおすことにより，求める結果，すなわち $f(x)=ce^{\lambda x}$（$c>0$，λ はそれぞれ任意の定数）を得る． □

最後に，不等式

$$(**)\quad \tan\left(\frac{x_1+\cdots\cdots+x_n}{n}\right)\geqq\sqrt[n]{\tan x_1\cdots\cdots\tan x_n}$$

$$\left(0\leqq x_i<\frac{\pi}{4},\ i=1,\ \cdots\cdots,\ n\right)$$

が成立するかどうかについて考察しよう．このことについては，次の定理が成立する．

定理 2 関数 $f(x)$ は区間 I で正でありかつ連続とする．このとき，区間 I で

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqq\sqrt{f(x_1)f(x_2)}$$

が成立するならば，$x_i\in$ I（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$）に対して

$$(***)\quad f\left(\frac{x_1+\cdots\cdots+x_n}{n}\right)\geqq\sqrt[n]{f(x_1)\cdots\cdots f(x_n)}$$

が成立する．

証明 最初に $n=2^k$（k は自然数）のとき，不等式（***）が成立することを，数学的帰納法を用いて証明しよう．

$k=1$ のときは，仮定より明らかに成立する．

$k=m$（$\geqq 2$）のとき，成立すると仮定して，$k=m+1$ のときも成り立つことを示す．

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_{2^{m+1}}}{2^{m+1}}\right)$$

$$=f\left(\frac{\dfrac{x_1+\cdots+x_{2^m}}{2^m}+\dfrac{x_{2^m+1}+\cdots+x_{2^{m+1}}}{2^m}}{2}\right)$$

$$\geqq\sqrt{f\left(\frac{x_1+\cdots+x_{2^m}}{2^m}\right)f\left(\frac{x_{2^m+1}+\cdots+x_{2^{m+1}}}{2^m}\right)}$$

$$\geqq\sqrt{\sqrt[2^m]{f(x_1)\cdots f(x_{2^m})}\,\sqrt[2^m]{f(x_{2^m+1})\cdots f(x_{2^{m+1}})}}$$

$$=\sqrt[2^{m+1}]{f(x_1)\cdots\cdots f(x_{2^{m+1}})}$$

このことは，$k=m+1$ のとき，（***）が成立することを示している．

ゆえに，$n=2^k$ のときは成立する．

$n \neq 2^k$ のときは，$2^{k-1}<n<2^k$ となるような k に対して，$n+l=2^k$ となるような l を定める．

$\dfrac{x_1+\cdots\cdots+x_n}{n}=p$ とおく．

このとき，$x_1+\cdots\cdots+x_n=np$ である．ここで

$$\frac{1}{n+l}(x_1+\cdots\cdots+x_n+\overbrace{p+\cdots\cdots+p}^{l\text{個}})$$

$$=\frac{1}{n+l}(np+lp)=p$$

であることに注意すれば

$$f\left(\frac{x_1+\cdots\cdots+x_n}{n}\right)=f(p)$$

$$=f\left(\frac{1}{n+l}(x_1+\cdots\cdots+x_n+\overbrace{p+\cdots\cdots+p}^{l\text{個}})\right)$$

$$\geqq \sqrt[n+l]{f(x_1)\cdots\cdots f(x_n)f(p)^l}$$

（$n+l=2^k$ より前半の結果を利用）

したがって

$$f(p)^{n+l}\geqq f(x_1)\cdots\cdots f(x_n)f(p)^l$$

このことより

$$f(p)^n\geqq f(x_1)\cdots\cdots f(x_n)$$

すなわち

$$f\left(\frac{x_1+\cdots\cdots+x_n}{n}\right)\geqq\sqrt[n]{f(x_1)\cdots\cdots f(x_n)}$$

を得る．これで（***）は証明された． □

この定理より，不等式（**）は成立することがわかる．

（茨城県立藤代高等学校）