高校数学における複素数

坂本　茂（さかもと　しげる）

§ 1. はじめに

現在は高校数学から複素平面はなくなってしまったが，数学Ⅰの2次方程式で虚数解を学ぶときには複素数がでてくる．複素数は数学の世界では重要なものであるけれども，高校数学では今も昔も文字どおり想像上の数であり，その意味ははっきりしないのではないか．判別式が負になるようなときは解は考えなくて 解なし でもいっこうに困らない．「そんな数を考えるなら数学はまたほかにも想像上の数を考えるのだろう」と思う高校生もいるだろう．筆者が複素数について初めて感動したのは式

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

を知ったときである．複素平面が教えられているときにはある種の図形の問題を解くのに有効なこともあった．外国の初等的な理科の本で複素数を使って物体の点の位置を表して運動を説明しているのを見たこともある．

複素数の四則演算が定義されて，複素数の集合は可換体を作り，実数の集合の拡大体であることが確かめられても，複素数が実際の数学でどんな役割をするのか漠然としたものを感ずるのではないだろうか．しかし生徒にとって複素数は計算としてはやさしいものなのである．

複素数は2次方程式と一緒に導入されるが本来は2次方程式に関する限りは必要ないものである．歴史的にみても3次方程式を解くことになって初めて必要になってきたのであろう．因数定理で見つけられる3実解のときにもこの虚数は必要であり，皮肉なことに3次方程式は代数的に解けるとはいってもこの場合の実解を実数の範囲では代数的に表せないのである．

今年度は主に数学Ⅰを担当しており，本誌でも2次方程式について取り上げられたこともあったので，まず2次方程式から見て3次方程式について考えよう．90年に日本の高校生が初参加した国際数学オリンピックには高次方程式の問題が出題されたこともある．

§ 2. 複素数の開平

これから実数の集合，複素数の集合をそれぞれR，Cとし，虚数単位を i とする．$i^2=-1$ である．

いま $p,\ q\in$R のとき2項方程式

$$z^2=p+qi$$

を満たすような数 z を考えるとき

$$z=\pm\sqrt{p+qi}$$

とできるのだろうか，また z は複素数なのだろうか．$z\in$C とすると適当な実数 $a,\ b$ により

$$z=a+bi\ ;\ a,\ b\in\mathrm{R}$$

と表すことができ，次のようになる

$$(a+bi)^2=p+qi$$

左辺を展開して両辺の実部，虚部を比べて

$$a^2-b^2=p,\ 2ab=q$$

となる．最初の式に a^2 を掛けて

$$a^4-a^2b^2-a^2p=0$$

また，次の式から

$$4a^4-4a^2p-q^2=0$$

$$(2a^2-p)^2=p^2+q^2$$

$a^2,\ b^2>0$ だから

$$2a^2=\sqrt{p^2+q^2}+p,\ 2b^2=\sqrt{p^2+q^2}-p$$

$2ab=q$ に注意すると q の正負によって2つの場合に分けられ $r=\sqrt{p^2+q^2}$ とすると

$$z=\pm\left(\sqrt{\frac{r+p}{2}}+i\sqrt{\frac{r-p}{2}}\right),\ q\geqq 0$$

$$z=\pm\left(\sqrt{\frac{r+p}{2}}-i\sqrt{\frac{r-p}{2}}\right),\ q<0$$

として複素数 z が求められる．この複素数が最初の2項方程式を満たすことは2乗してみれば分かる．

複素数の実部，虚部の実数における四則演算と平方根を求めることだけで求められたのである．また，この結果から $z^2=\alpha$ の解の共役複素数は $z^2=\bar{\alpha}$ の解であることが分かる．

たとえば $z^2=12-5i$ の解は $\pm\dfrac{5-i}{\sqrt{2}}$ である．

§3．複素数を係数とする2次方程式の解

係数が複素数である一般の2次方程式すなわち

$\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$；$\alpha,\ \beta,\ \gamma\in\mathrm{C},\ \alpha\neq 0$

を考える．前節から

$$\delta^2=\beta^2-4\alpha\gamma$$

となるような複素数 δ があるから方程式の解は

$$z=\frac{-\beta\pm\delta}{2\alpha}$$

として表せる．

実際，$a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_2\in\mathrm{R}$

$$\alpha=a_1+a_2i,\quad \beta=b_1+b_2i,\quad \gamma=c_1+c_2i$$

と表わされていたとすると

$$z^2+2(b_1+b_2i)z+c_1+c_2i=0$$

ならば，$p=b_1^2-b_2^2-c_1,\ q=2b_1b_2-c_2$ とおいて上式より $d_1,\ d_2$ を定めて

$$z=-b_1\pm d_1+(-b_2\pm d_2)i$$

である．

たとえば，複素数を係数とする2次方程式

$$(2-i)x^2-(2+i)x-1-i=0$$

は $\delta^2=15+8i$ であり，§2よりこれを開平すると $\delta=\pm(4+i)$ であるから

$$x=\frac{2+i\pm(4+i)}{2(2-i)}=-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i,\quad 1+i$$

実はこの方程式は

$$\{(1+2i)x+i\}(ix+1-i)=0$$

を展開して作られたものである．

例として複2次方程式を考えよう．

$$x^4+2px^2+q=0$$

は係数が複素数でも x^2 を求めて解けるわけだが，係数は実数 $p,\ q\in\mathrm{R}$ として解いてみよう．

$p^2-q>0$ の場合は $x^2=-p\pm\sqrt{p^2-q}$ を解けばよく $p,\ q$ が共に正のときは4つの虚解で他の場合は2つの実解と2つの虚解を持つ．

$p^2-q<0$ の場合は $\sqrt{q}\pm p>0$ であり

$$x^4+(2\sqrt{q}-2\sqrt{q}+2p)x^2+\sqrt{q}^{\,2}=0$$

$$(x^2+\sqrt{q})^2-2(\sqrt{q}-p)x^2=0$$

よって4つの解は

$$x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{q}-p}{2}}\pm i\sqrt{\frac{\sqrt{q}+p}{2}}$$

ここで複合はそれぞれ±の4つの組み合わせである．

これはまた $x^2=-p\pm i\sqrt{q-p^2}$ であるから§2の複素数開平の式より直ちに導かれる．

このことから方程式 $x^4+x^2+1=0$ の解は

$$\pm\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\quad \pm\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

である．また1の複素数の3乗根 ω は $\omega^3=1$，$\omega^2+\omega+1=0$ であるから，この4次方程式の解は $\pm\omega,\ \pm\omega^2$ と表される．

§4．因数分解による3次方程式の解法

数Ⅰでよく知られた因数分解の公式

$x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$

を筆者は高校生のある日ながめていた．そして3次方程式の解法に思い付いたのだった．それは x だけを未知数と見て $y,\ z$ を定数と見ることだった．

$$x^3-3yzx+y^3+z^3=0$$

この3次方程式の解は，因数分解された因数を0とおいた1次および2次方程式を解いて得られた．

$$x=-y-z,\quad \frac{1}{2}(y+z)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}(y-z)i$$

あとは係数に合わせ $y,\ z$ を決めればよかったが，今日のような計算機もなく，あまり実用的でないので，このメモは引き出しの奥に入れたままだった．

先に見てきたように2次方程式はすべて複素数の範囲で解を持ち，したがって2次式は複素数の範囲で因数分解できる．この恒等式の右辺をさらに複素数の範囲で因数分解しよう．

$$\begin{aligned}&x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy\\&\quad=x^2-(y+z)x+y^2-zy+z^2\\&\quad=x^2-(y+z)x+(\omega y+\omega^2z)(\omega^2y+\omega z)\\&\quad=(x+\omega y+\omega^2z)(x+\omega^2y+\omega z)\end{aligned}$$

となるから恒等式の右辺は

$$(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2z)(x+\omega^2y+\omega z)$$

と因数分解された．ここで ω は2次方程式

$$\omega^2+\omega+1=0$$

の解の1つであり $\omega^3=1$ である．

恒等式の左辺を0とおき $y,\ z$ を定数とみてできる x の3次方程式

$$x^3-3yzx+y^3+z^3=0$$
の3つの解は因数分解により
$$x=-y-z,\ \ -\omega y-\omega^2 z,\ \ -\omega^2 y-\omega z$$
となる.

本誌 No. 8 にも2次方程式の解の公式について扱ってあり，因数分解によるものは明快かと思える.

さて，以上のことから
$$x^3+3px+2q=0$$
の形をした2次の項がない3次方程式を解くには
$$yz=-p,\ \ y^3+z^3=2q$$
となるような y, z の組が1つでも見つかればよいわけである. y^3, z^3 の和と積はそれぞれ $2q$, $-p^3$ だから2次方程式
$$t^2-2qt-p^3=0$$
の解 $q\pm\sqrt{q^2+p^3}$ が y^3, z^3 である.

このとき $yz=-p$ に注意して y, z を定めなければならない.

2次の項を欠く3次方程式は代数的に解けたわけである. 最後に複素数の立方根を求める操作があるが，これを実数の範囲で代数的にできるかという問題が残る. すなわち2項方程式
$$x^3=p+qi\ ;\ p,\ q\in\mathrm{R}$$
で $x=a+bi$ とおいて実数 a, b を定めようとしても前節 §2 の2次の場合のように簡単にはいかないのである.

§ 5. 3次方程式の解法

係数 a, b, c, d は複素数で z を未知数とする一般の3次方程式
$$az^3+bz^2+cz+d=0,\ \ a\neq 0$$
ではこの両辺に恒等式
$$a\left(z+\frac{b}{3a}\right)^3=az^3+bz^2+\frac{b^2}{3a}z+\frac{b^3}{27a^2}$$
を加えると
$$a\left(z+\frac{b}{3a}\right)^3+cz+d=\frac{b^2}{3a}z+\frac{b^3}{27a^2}$$
となり $x=z+\dfrac{b}{3a}$ とおくと2次の項を欠いた3次方程式に移されることがわかる.

同様に n 次方程式では $n-1$ 次の項を欠いた方程式に写されるから，2次方程式は2項方程式に写されるわけである.

これを
$$x^3+3px+2q=0$$
とすると係数は
$$p=\frac{c}{3a}-\frac{b^2}{9a^2},\ \ q=\frac{b^3}{27a^3}-\frac{bc}{6a^2}+\frac{d}{2a}$$
である. この3次方程式は §4 の形をしたものであるから解くことができ，前節の y, z の符号を変えたものを u, v とおいて表すと
$$x=u+v,\ \ \omega u+\omega^2 v,\ \ \omega^2 u+\omega v$$
ここで u, v は
$$uv=-p,\ \ u^3+v^3=-2q$$
であり u^3, v^3 は2次方程式
$$t^2+2qt-p^3=0$$
の2解 $-q\pm\sqrt{q^2+p^3}$ である.

複素数を係数とする一般の3次方程式は複素数の範囲で代数的に解けたわけで，たとえば因数定理からすぐ解ける3次方程式の2つの例を調べよう.
$$x^3=x+6$$
の解は公式から
$$u=\left(3+\frac{11}{9}\sqrt{6}\right)^{\frac{1}{3}},\ \ v=\left(3-\frac{11}{9}\sqrt{6}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$x=u+v,\ \ \frac{-u-v\pm\sqrt{3}\,i(u-v)}{2}$$
となり因数定理で解いた $x=2$, $-1\pm\sqrt{2}\,i$ と異なるようだが，電卓の計算では十分一致する.
$$x^3-2x+1=0$$
については，公式から計算しようとすると

$uv=\dfrac{2}{3}$ を満たし，複素数 $-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{15}}{18}i$

の3乗根である複素数 u, v を求めなければならない. しかしこれを求めることは難しく，次の節の複素平面で考えることになる.

§ 6. 複素数平面

横軸に実部，縦軸に虚部をとって複素数を表す複素平面は重要なものである. これを3次方程式の解や三角関数の公式に利用しよう. 和と差に関しては2次元ベクトルと同じであるが，積と商に関してその特長があり三角関数の加法定理により n が整数のとき次のド・モアブルの定理
$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$
が導かれる.

幾何では点や座標軸の回転などに応用すると便利である. 複素数 z が表す点を原点の回りに角 θ 回転

させた点を表す複素数 z' とすると

$$z'=z(\cos\theta+i\sin\theta)$$

であるから $z=x+iy$, $z'=x'+iy'$ とするとき実部，虚部を比べて次のようになる．

$$x'=x\cos\theta-y\sin\theta$$
$$y'=x\sin\theta+y\cos\theta$$

なお座標軸の θ 回転ではこの逆変換となる、

また三角関数の3倍角公式などもこの定理から導けるが，$n=5$ とおいて実部，虚部を比べると5倍角の式は次のようになる．

$$\sin 5\theta=16\sin^5\theta-20\sin^3\theta+5\sin\theta$$

この式で sin を cos に変えると余弦の式になる．

1の n 乗根は 1, ζ, ζ^2, ……, ζ^{n-1} と表される．ここで

$$\zeta=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$$

したがって複素数の n 乗根が三角関数で表される．

2項方程式 $z^n=\alpha$ の1根を $a\in\mathrm{C}$, $a^n=\alpha$ とし $z=aw$ とすると $w^n=1$ となるから

$$z=a,\ a\zeta,\ a\zeta^2,\ \cdots\cdots,\ a\zeta^{n-1}$$

である．

ド・モアブルの定理から§2の2項方程式

$$z^2=a+bi$$

は $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$, $r>0$ とし

$$r^2\cos 2\theta=a,\quad r^2\sin 2\theta=b,\quad r^2=a^2+b^2$$

を解けばよく，θ の正弦，余弦は2倍角公式により a, b で表され§2の式を得る．

§7. 実係数の3次方程式の解の判別

3次方程式 $x^3+3px+2q=0$ の解は

$$x=u+v,\ u\omega+v\omega^2,\ u\omega^2+v\omega$$

p, $q\in\mathrm{C}$ のとき $D=q^2+p^3\in\mathrm{C}$ を開平し

$$u^3,\ v^3=-q\pm\sqrt{D}\in\mathrm{C}$$

である．3乗根の1つをそれぞれ α, β とし

$$u=\alpha,\ \alpha\omega,\ \alpha\omega^2\ ;\ v=\beta,\ \beta\omega,\ \beta\omega^2$$

と表せるから $uv=-p$ となるような u, v を決めればよい．

ここでは係数が実数 p, $q\in\mathrm{R}$ のときに限って考える．u^3, v^3 が実数か複素数かは実数 D の正負によるから D を判別式とよぼう．

(1) $D>0$ のとき

実数 a, $b\in\mathrm{R}$ を実数 $-q\pm\sqrt{D}\in\mathrm{R}$ の3乗根の1つとすると前節§6から

$$u=a,\ a\omega,\ a\omega^2\ ;\ v=b,\ b\omega,\ b\omega^2$$

であり $uv=-p$ に注意すると u, v の組は

$$(u,\ v)=(a,\ b),\ (a\omega,\ b\omega^2),\ (a\omega^2,\ b\omega)$$

の3組があるが，どの組をとっても解は

$$x=a+b,\ a\omega+b\omega^2,\ a\omega^2+b\omega$$

である．すなわち1つの実解と共役な複素数

$$x=a+b,\quad -\frac{a+b}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}\,(a-b)}{2}$$

をもつ．

(2) $D=0$ のとき

このときは(1)で $a=b$ のときだから実解

$$x=2a,\ -a\ (\text{重解})$$

をもつ．p, q がともに0のとき3重解である．

(3) $D<0$ のとき

$D<0$ より $p^3<-q^2<0$ であるから $p<0$ である．u^3, v^3 は共役な複素数 $-q\pm i\sqrt{-D}$ であり $r(\cos\theta\pm i\sin\theta)$, $r>0$ とおくと

$$r^2=-p^3,\ \cos\theta=-\frac{q}{r}$$

である．ド・モアブルの定理より共役複素数 u^3, v^3 それぞれの3乗根の1つ α, β を

$$\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\theta}{3}\pm i\sin\frac{\theta}{3}\right)$$

とすることができるから§6より

$$u=\alpha,\ \alpha\omega,\ \alpha\omega^2\ ;\ v=\beta,\ \beta\omega,\ \beta\omega^2$$

である．$uv=-p$ に注意すると α, β および ω, ω^2 はそれぞれ共役であるから u, v の組は

$$(u,\ v)=(\alpha,\ \beta),\ (\alpha\omega,\ \beta\omega^2),\ (\alpha\omega^2,\ \beta\omega)$$

の3組があるが，どの組をとっても解は

$$x=\alpha+\beta,\ \alpha\omega+\beta\omega^2,\ \alpha\omega^2+\beta\omega$$

となる．すなわち異なる3実解

$$x=2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\theta}{3},\ 2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\theta\pm 2\pi}{3}$$

をもつ．$\sqrt[3]{r}=\sqrt{-p}$

(3)の場合に代数的に解くには $\cos\dfrac{\theta}{3}$ を $\cos\theta$ で表さなければならない．3倍角公式

$$\cos\theta=4\cos^3\frac{\theta}{3}-3\cos\frac{\theta}{3}$$

すなわち $4t^3-3t-\cos\theta=0$ を解く必要がある．しかしこれは3次方程式で，しかもこの方程式の判別

式は $D=\frac{\cos^2\theta-1}{64}<0$ となる．それゆえ(3)の場合の3次方程式を解かなければならず，結局3実解をもつ場合は実数の範囲では代数的に表せないのである．このことは一般に任意の角の3等分線が，定規とコンパスとの有限回の操作で作図できないことを示しているのである．前にもみたように複素数を使えば問題なく代数的に表せるわけである．

なお係数が複素数の場合には一般に u^3, v^3 が共役でなく(3)と同じように解けない．

角の3等分問題は3次方程式の解を定規とコンパスで作図する問題に置き換えられることが分かるが，この方程式の解が四則と開平を有限回行っても表すことができないので，作図不可能であることを示している．

§ 8. ド・モアブルの定理から得た恒等式

方程式の解を複素平面で表すと便利なことが分かるが，次に複素平面から得られる数式を示そう．

複素数の積は複素平面で三角関数の加法定理から

$$(\cos\theta_1+i\sin\theta_2)(\cos\theta_1+i\sin\theta_2)=\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)$$

と表される．これよりド・モアブルの定理

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

が導かれた．これを展開して $r=2k$ とおき

$$\sum_{r=0}^{n} i^r\sin^r\theta\cos^{n-r}\theta=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

両辺の実部と虚部を比べて n 倍角の正弦，余弦は

$$\sin n\theta=\sum_{k=0}^{s}(-1)^k{}_nC_{2k+1}\sin^{2k+1}\theta\cos^{n-2k-1}\theta=\cos^n\theta\sum_{k=0}^{s}(-1)^k{}_nC_{2k+1}\tan^{2k+1}\theta$$

$$\cos n\theta=\sum_{k=0}^{c}(-1)^k{}_nC_{2k}\sin^{2k}\theta\cos^{n-2k}\theta=\cos^n\theta\sum_{k=0}^{c}(-1)^k{}_nC_{2k}\tan^{2k}\theta$$

である．ここで $s=\left[\frac{n-1}{2}\right]$, $c=\left[\frac{n}{2}\right]$ とガウス記号を使い表す．

積分をするときにはこれとは反対に正弦，余弦の n 乗を整数倍の角の正弦，余弦で表されているとよいわけである．いま共役複素数

$$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta,\ \beta=\cos\theta-i\sin\theta$$

とすると $\beta=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)=\alpha^{-1}$ であるから r が整数のとき α^r, β^r はそれぞれ

$$(\cos\theta\pm i\sin\theta)^r=\cos(\pm r\theta)+i\sin(\pm r\theta)$$

であること $\alpha^n\beta^r=\alpha^{n-r}$ に注意しておこう．

$$\cos\theta=\frac{\alpha+\beta}{2},\ \sin\theta=\frac{\alpha-\beta}{2i}$$

であるが，これを n 乗する．まず余弦では

$$\cos^n\theta=2^{-n}\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r\alpha^r\beta^{n-r}=2^{-n}\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r\{\cos(2r-n)\theta+i\sin(2r-n)\theta\}$$

でありこの実部，虚部の比較で恒等式

$$\cos^n\theta=2^{-n}\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r\cos(2r-n)\theta$$

$$\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r\sin(2r-n)=0$$

を得る．正弦についても同様に

$$\sin^n\theta=(2i)^{-n}\sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-1}\{\cos(2r-n)\theta+i\sin(2r-n)\theta\}$$

だが n を偶数，奇数に分けて調べる必要がある．

この様にして導いた数式を次に掲げておこう．

$$\sin^{2m}\theta=\frac{1}{2^{2m}}\sum_{r=0}^{2m}(-1)^{m-r}{}_{2m}C_r\cos2(m-r)\theta=\frac{1}{2^{2m}}\{{}_{2m}C_m+2\sum_{k=1}^{m}(-1)^k{}_{2m}C_{m+k}\cos2k\theta\}$$

$$\sin^{2m+1}\theta=\frac{1}{2^{2m+1}}\sum_{r=0}^{2m+1}(-1)^{m-r}{}_{2m+1}C_r\sin(2m-2r+1)\theta=\frac{1}{2^{2m}}\sum_{r=0}^{m}(-1)^{m-r}{}_{2m+1}C_r\sin(2m-2r+1)\theta$$

$$\cos^n\theta=\frac{1}{2^n}\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r\cos(n-2r)\theta$$

$$\cos^{2m}\theta=\frac{1}{2^{2m}}\{{}_{2m}C_m+2\sum_{k=1}^{m}{}_{2m}C_{m-k}\cos2k\theta\}$$

$$\cos^{2m+1}\theta=\frac{1}{2^{2m}}\sum_{r=0}^{m}{}_{2m+1}C_r\cos(2m-2r+1)\theta$$

$$\int\sin^{2m}ax\,dx=\frac{1}{2^{2m}}\sum_{r=0}^{2m}\frac{(-1)^{m-r}{}_{2m}C_r}{2a(m-r)}\sin2(m-r)ax=\frac{1}{2^{2m}}\left\{{}_{2m}C_mx+\sum_{r=1}^{m}\frac{(-1)^r{}_{2m}C_{m+r}}{ra}\sin2rax\right\}$$

$$\int \sin^{2m+1}ax\,dx=\frac{1}{2^{2m}}\sum_{r=0}^{m}\frac{(-1)^{m-r+1}{}_{2m+1}C_r}{(2m-2r+1)a}\cos(2m-2r+1)ax$$

$$=\frac{1}{2^{2m+1}}\sum_{r=0}^{2m+1}\frac{(-1)^{m-r+1}{}_{2m+1}C_r}{(2m-2r+1)a}\cos(2m-2r+1)ax$$

$$\int \cos^{2m}ax\,dx=\frac{1}{2^{2m}}\{{}_{2m}C_m x+\sum_{r=1}^{m}\frac{{}_{2m}C_{m-r}}{ra}\sin 2rax\}$$

$$\int \cos^{2m+1}ax\,dx=\frac{1}{2^{2m}}\sum_{r=0}^{m}\frac{{}_{2m+1}C_r}{(2m-2r+1)a}\sin(2m-2r+1)ax$$

$$\int \cos^{n}ax\,dx=\frac{1}{2^{n}}\sum_{r=0}^{n}\frac{{}_{n}C_r}{(n-2r)a}\sin(n-2r)ax$$

$$\int \cos x\sin^{2m}x\,dx=\frac{1}{2m+1}\frac{1}{2^{2m}}\sum_{r=0}^{m}(-1)^{m+r}{}_{2m+1}C_r\sin(2m-2r+1)\theta$$

$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots\cdots$

$$\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\binom{2m}{r}2^k(m-r)^{2k}\sin 2(m-r)\theta=0$$

$$\sum_{r=0}^{2m}(-1)^r\binom{2m}{r}2^k(m-r)^{2k+1}\cos 2(m-r)\theta=0$$

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(2r-n)^{2k}\sin(2r-n)\theta=0$$

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}(2r-n)^{2k+1}\cos(2r-n)\theta=0$$

$$\sum_{r=0}^{2m+1}(-1)^r\binom{2m+1}{r}(2m-2r+1)^{2k}\cos(2m-2r+1)\theta=0$$

$$\sum_{r=0}^{2m+1}(-1)^r\binom{2m+1}{r}(2m-2r+1)^{2k-1}\sin(2m-2r+1)\theta=0$$

§ 9. おわりに

これまで複素数を代数方程式の解という立場から見てきた．大部分は筆者の高校時代の古いノートを元にして書いたものである．したがって興味ある高校生には関心をもっていただけると思う．そして複素数の有用性の理解に少しでも役立ててもらえれば幸である．G. H. ハーディはのちの本で『我々は実数の世界が虚数を含んだ複素数の世界の中の極めて小さい一部であることを知っている．しかも実数に限って記述するとき，乱雑で無関係に見える事実が，観点を複素数の世界まで拡張して考えると見事な関連性と自明な必然性を持っていることを発見することがある.』と書いている．

最後に本稿を書くにあたり計算し直した結果，実係数の3次方程式の場合は虚数解のときに代数的に解けるが，三角関数による数値解法が得られたのでここにその手順だけを示しておこう．

$x^3+3px+2q=0$；$p,\ q\in\mathrm{R}$

(1)　$q^2+p^3>0$

① $p>0$：$|\alpha|<\frac{\pi}{4}$，$|\beta|<\frac{\pi}{4}$

$$\tan 2\alpha=\frac{\sqrt{p^3}}{q},\quad \tan^3\beta=\tan\alpha$$

$$x=-2\sqrt{p}\cot 2\beta,$$
$$\sqrt{p}\cot 2\beta\pm i\sqrt{3p}\,\mathrm{cosec}\,2\beta$$

② $p<0$：$|\alpha|<\frac{\pi}{4}$，$|\beta|<\frac{\pi}{4}$

$$\sin 2\alpha=\frac{\sqrt{-p^3}}{q},\quad \tan^3\beta=\tan\alpha$$

$$x=2\sqrt{-p}\,\mathrm{cosec}\,2\beta,$$
$$\sqrt{-p}\,\mathrm{cosec}\,2\beta\pm i\sqrt{-3p}\cot 2\beta$$

(2)　$q^2+p^3\leqq 0$

$$\cos\theta=\frac{-q}{\sqrt{-p^3}},\quad 0\leqq\theta<\pi$$

$$x=2\sqrt{-p}\cos\frac{\theta}{3},\quad 2\sqrt{-p}\cos\frac{\theta\pm 2\pi}{3}$$

たとえば§5の3次方程式 $x^3-2x+1=0$ について計算した数値は解 $x=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ を十分満足する値である．

（東京都立　鷺宮高等学校）