複素数と極・極線（その１）

岡　多賀彦（おか　たかひこ）

第１章　はじめに

２次曲線の「接点・接線」と全く同じ数式関係を保つものに,「焦点・準線」と「極・極線」がある.

一般の２次曲線の方程式を

$$ax^2+2hxy+by^2+2fx+2gy+c=0$$

で表すと，接点（焦点，極）を（p, q）とする接線（準線，極線）の方程式は

$$apx+h(qx+py)+bqy$$
$$+f(x+p)+g(y+q)+c=0$$

と表されることが知られている.[1]

接線（準線，極線）の方程式をつくるには,（x, y）と（p, q）を平均するように，もとの２次曲線の方程式について，２次の x^2, y^2 を px, qy に，１次の xy, x, y を $\dfrac{qx+py}{2}$, $\dfrac{p+x}{2}$, $\dfrac{q+y}{2}$ に置き換えればよい.

これを最も簡単な２次曲線の１つである放物線

$$y=x^2$$

に適用すると，接点（焦点，極）を（p, q）とする接線（準線，極線）の方程式は

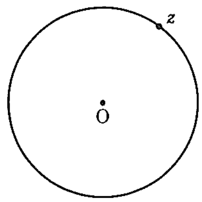
$$y=2px-q$$

となる．これについては「放物線 $y=x^2$ の極・極線」と題して発表した．その中で,「パスカルの定理」における３交点を通る直線の方程式と「ブリアンションの定理」における３直線の交点の座標を与え，両者が「極・極線」の関係にあることを示した.[2]

ここでは,「複素数と極・極線」と題して，平成６年度から実施される高等学校学習指導要領での「数学Ｂ」で復活する「複素数と複素数平面」に関連させて，複素数と複素数平面を用いて，いま１つの最も簡単な２次曲線の１つである原点Ｏを中心とする半径１の円（ここでは，簡単に「単位円」とよぶ).

$$z\bar{z}=1 \quad \cdots\cdots (1)$$

について，その「極・極線」の関係を調べる.



この中で，単位円の場合，複素数 a で与えられる極に対する極線の方程式が

$$\bar{a}z+a\bar{z}=2$$

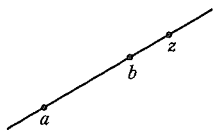
で与えられること,「パスカルの定理」における直線の方程式と「ブリアンションの定理」における交点に対応する複素数などを示す.

ちなみに，円の場合，焦点は中心に対応するが，中心に対する極線は無限遠にあるので，だ円，放物線，双曲線と違って,「焦点・準線」の関係は存在しない.

なお，複素数平面の上の直線や円の一般の点に対応する複素数には z を用いる．点 A, B, C などについては a, b, c などを用いて対応する複素数を表し，それらの共役複素数を $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ などで表す．式を導くとき参考にする図では，点 A, B, C などの代わりに，それらを表す複素数 a, b, c などを用いる．また，式の番号 (1), (2) などは全体を通して，①, ② などは章の内部の [1], [2] などの中だけに適用される.

第２章　直線，垂線，接線

[1]　２点ＡとＢを通る直線の方程式



３つの複素数 a, b, z について，それらの差 $b-a$ と $z-a$ が実数倍の関係にあればよいので,

$$\frac{z-a}{b-a}=\overline{\left(\frac{z-a}{b-a}\right)} \quad \cdots\cdots ①$$

となる.

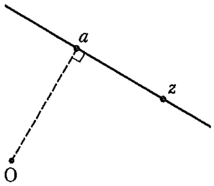
① から，求める直線の方程式は

$(\overline{b}-\overline{a})z-(b-a)\overline{z}=a\overline{b}-\overline{a}b$ …… (2)

となる．

[2]　点Aを通り線分 OA に垂直な直線の方程式

2 つの複素数 a と z について，a と $z-a$ が純虚数倍の関係にあればよいので，



$$\frac{z-a}{a}+\overline{\left(\frac{z-a}{a}\right)}=0 \quad \cdots\cdots ①$$

となる．

① から求める直線の方程式は

$\overline{a}z+a\overline{z}=2a\overline{a}$ …… (3)

となる．

[3]　単位円の周上の異なる 2 点AとBを通る割線の方程式

2 点AとBが単位円の周上にあるので，(1) から

$$a\overline{a}=1,\ \ b\overline{b}=1 \quad \cdots\cdots ①$$

また，(2) から

$$(\overline{b}-\overline{a})z-(b-a)\overline{z}=a\overline{b}-\overline{a}b \quad \cdots\cdots ②$$

となる．次に，① を

$$\overline{a}=\frac{1}{a},\ \ \overline{b}=\frac{1}{b}$$

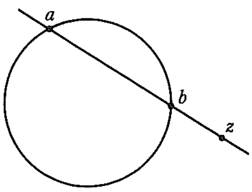
と変形し，② に代入する．

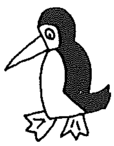
$$\frac{a-b}{ab}z+(a-b)\overline{z}=\frac{(a-b)(a+b)}{ab}$$

最後に，$a \neq b$ から，求める割線の方程式は

$z+ab\overline{z}=a+b$ …… (4)

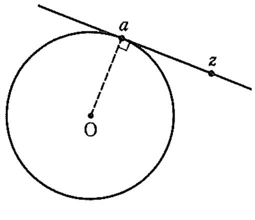
となる．[3)4)]





[4]　単位円の周上の点Aで引いた接線の方程式

中心Oと点Aを結ぶ半径 OA と点Aで引いた接線が直交するので，(1), (3) から



$$a\overline{a}=1 \quad \cdots ①$$

$$\overline{a}z+a\overline{z}=2a\overline{a} \quad \cdots ②$$

となる．

次に，① を ② に代入すると，求める接線の方程式は

$\overline{a}z+a\overline{z}=2$ …… (5)

となる．

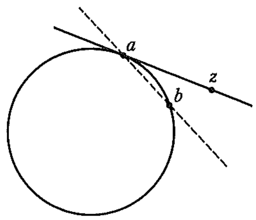
また，割線 AB を考え，2 つの交点AとBのうち点Bを点Aに限りなく近づけた極限が点Aでの接線になるので，(4) で $b=a$

とおくと，求める接線の方程式は

$z+a^2\overline{z}=2a$ …… (6)

となる．

(5), (6) は共に単位円の周上の点Aで引いた接線の方程式である．このうち，(6) は第 3 章で議論する極線の方程式と両立できるが (5) の方はそれと矛盾する．



[5]　単位円の周上の異なる 2 点 A，B で引いた接線の交点

2 点AとBで引いた接線の上に交点があるので，(6) から

$$z+a^2\overline{z}=2a \quad \cdots\cdots ①$$

$$z+b^2\overline{z}=2b \quad \cdots\cdots ②$$

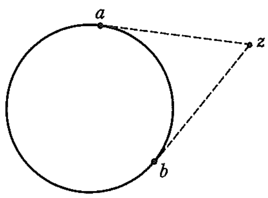
①, ② から z を消去して整理すると，交点に対応する共役複素数は

$\overline{z}=\dfrac{2}{a+b}$ …… (7)

また，交点を表す複素数は

$z=\dfrac{2ab}{a+b}$ …… (7)′

となる．



この章では，以下の章で取り上げる問題を解くのに必要な複素数についての基本的な関係式を調べた．

第3章　極と極線

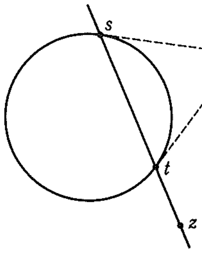
[1]　単位円の外部の極に対する極線の方程式

単位円の外部にある点Aからその円に対して2本の接線を引き，2つの接点をSとTとする．直線STの方程式を求める．

2つの接点SとTで引いた接線の交点がAなので，(7), (7)′ から

$\bar{a}=\dfrac{2}{s+t}$ …… ①

$a=\dfrac{2st}{s+t}$ …… ②



となる．

また，(4) から

$z+st\bar{z}=s+t$ …… ③

となる．

①, ② を用いて ③ から $s+t$，st を消去すると，

$$\underline{\bar{a}z+a\bar{z}=2} \quad \cdots\cdots (8)$$

となる．

(8) が単位円の外部の極Aに対する極線の方程式である．

ところで，(8) の両辺を $\bar{a}$ で割ると，

$$z+\frac{a}{\bar{a}}\bar{z}=\frac{2}{\bar{a}}$$

となる．極が単位円の周上の点（接点）でないとき，$a\bar{a}\neq1$ から (8) は (6) に移れない．

このことから，極線 (8) と両立する接線の方程式は (5) であることがわかる．

[2]　単位円の内部の極に対する極線の方程式

単位円の内部の点Aを通る2本の割線を引く．それぞれの割線について円との2つの交点で，円に対して接線を引き，2本の接線の交点を定める．このようにしてできる2つの交点をSとTとするとき，直線STの方程式を求める．

(8) から，

$$\bar{s}a+s\bar{a}=2,\quad \bar{t}a+t\bar{a}=2 \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つので，

$$\bar{t}-\bar{s}=\frac{s\bar{t}-\bar{s}t}{2}\bar{a},\quad t-s=-\frac{s\bar{t}-\bar{s}t}{2}a \quad \cdots ②$$

となる．

また，(2) から

$$(\bar{t}-\bar{s})z-(t-s)\bar{z}=s\bar{t}-\bar{s}t \quad \cdots\cdots ③$$

となる．

次に，② の $\bar{t}-\bar{s}$，$t-s$ を ③ に代入し整理すると，

$$(s\bar{t}-\bar{s}t)(\bar{a}z+a\bar{z}-2)=0$$

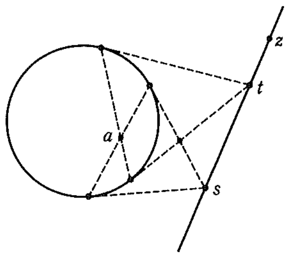
となる．

最後に，一般に $s\bar{t}\neq\bar{s}t$ なので

$$\underline{\bar{a}z+a\bar{z}=2} \quad \cdots\cdots (9)$$

となる．

(9) が単位円の内部の極Aに対する極線の方程式である．(8) と同様に，単位円の周上の点Aにおける接線の方程式 (5) に一致する．



[3]　定点を通る弦を同じ比に内分，外分する点の軌跡

単位円の外部の点Aからその円に割線を引き，2つの交点をSとTとする．この割線の上に点Zをとり，線分STを2点A，Zが同じ比に外分，内分するような点Zの軌跡を求める．

2点A，Zが割線STの上にあるので，(4) から

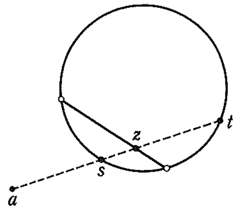
$a+st\bar{a}=s+t$ …… ①

$z+st\bar{z}=s+t$ …… ②

となる．

また，線分STを外分，内分する点がA，Zなので，

$\dfrac{t-z}{z-s}=\dfrac{t-a}{s-a}$ …… ③



となる．③ を整理すると，

$$2st-(a+z)(s+t)+2az=0 \quad \cdots\cdots ④$$

となる．

次に，①, ④ から

$$s+t=\frac{2a(\bar{a}z-1)}{a\bar{a}+\bar{a}z-2},\quad st=\frac{a(z-a)}{a\bar{a}+\bar{a}z-2} \quad \cdots\cdots ⑤$$

となる．⑤ を ② に代入して整理すると，

$$(z-a)(\bar{a}z+a\bar{z}-2)=0$$

となる．

最後に，$z \neq a$ から求める内分点Zの軌跡は

$$\underline{\bar{a}z+a\bar{z}=2} \quad \cdots\cdots \text{(10)}$$

となる．

(10) は外部の極Aに対する極線の方程式 (8) に一致している．つまり，外分点Aを固定したときの内分点Zの軌跡は，外分点Aを外部の極とする極線そのものになっている．ただし，円の周上や外部では，点Aを通る直線が円と異なる2点で交わらないので，内分点の軌跡は存在しない．

また，(10) が2つの複素数 a と z について対称になっているので，内分点Zを固定したときの外分点Aの軌跡もまた内分点Zを内部の極とする極線そのものになっている．

（以下 次号へつづく）

参考文献

1）矢野健太郎，平面解析幾何学（基礎数学選書2）裳華房　1969年

2）岡　多賀彦，放物線 $y=x^2$ の極・極線（数研通信 No. 7）数研出版　1989年

3）片山　孝次，複素数の幾何学（数学入門シリーズ3）岩波書店　1982年

4）高橋　正明，複素数（モノグラフ13）科学新興社　1968年

（兵庫県 灘高等学校）