和の公式 $\sum_{k=1}^{n} k^m$ について

結川（ゆいかわ）　義明（よしあき）

§　**はじめに**

和の公式

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

はそれぞれ恒等式

$$(k+1)^2-k^2=2k+1$$
$$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$$
$$(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$$

を用いて，導くことができる．

ここでは，上の恒等式を用いずに，$\sum_{k=1}^{n} k^2$，$\sum_{k=1}^{n} k^3$，を求め，更に，$\sum_{k=1}^{n} k^m$（mは自然数）を求めるための式を導いてみたい．

1　$\sum_{k=1}^{n} k^2$ について

$\sum_{k=1}^{n} k$ を $(n+1)$ 個加えた $(n+1)\sum_{k=1}^{n} k$ から

$$(n+1)\text{個の和}\left\{\begin{array}{l} \sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+\cdots\cdots+n \\ \sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+\cdots\cdots+n \\ \qquad\qquad\vdots \\ \sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+\cdots\cdots+n \end{array}\right.$$

$\sum_{k=1}^{n} k^2$ の公式を求めることを考える．

そこで，上の を下のように２つに分け，それぞれの和を求める．

$$\begin{array}{l} 1+2+3+\cdots\cdots+n \\ 1+2+3+\cdots\cdots+n \\ \vdots \\ 1+2+3+\cdots\cdots+n \\ 1+2+3+\cdots\cdots+n \end{array}$$

まず， の和を求めるために，各式を下のように列ごとに加えると

$$\begin{array}{rr} 1+2+3+\cdots\cdots+ & n \\ 2+3+\cdots\cdots+ & n \\ 3+\cdots\cdots+ & n \\ \ddots & \vdots \\ +) \qquad\qquad & n \\ \hline \end{array}$$

$$1+2\cdot2+3\cdot3+\cdots\cdots+n\cdot n$$
$$=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2 \qquad (\because\ 1^2=1\text{ から})$$
$$=\sum_{k=1}^{n} k^2 \qquad \text{が得られる．}$$

次に， の和を求めるために，各式を下のように斜めに加えると

$$\begin{array}{l} 1 \\ 1+2 \\ 1+2+3 \\ \vdots \\ +)\ 1+2+3+\cdots\cdots+n \\ \hline \end{array}$$

$$1+(1+2)+\cdots\cdots+(1+2+3+\cdots\cdots+n)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(1+2+3+\cdots\cdots+k)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2} \qquad \text{が得られる．}$$

以上のことから

$$\sum_{k=1}^{n} k^2+\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}=(n+1)\sum_{k=1}^{n} k \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．左辺を整理すると

$$\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k=(n+1)\sum_{k=1}^{n}k$$

$$\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2=(n+1)\sum_{k=1}^{n}k-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\left\{(n+1)-\frac{1}{2}\right\}\times\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{4}$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{2}{3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{4}$ から

ゆえに $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3$ について

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2$ を $(n+1)$ 個加えた $(n+1)\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2$ から

$$\begin{array}{c} (n+1) \\ \text{個の和} \end{array}\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\boxed{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2 \end{array}\right.$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3$ の公式を求めることを考える．

そこで，上の ⬚ を下のように2つに分け，それぞれの和を求める．

$$\begin{array}{l} 1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2 \\ 1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2 \\ \vdots \\ 1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2 \\ 1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2 \end{array}$$

まず，◹ の和を求めるために，各式を下のように列ごとに加えると

$$\begin{array}{rr} 1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+ & n^2 \\ 2^2+3^2+\cdots\cdots+ & n^2 \\ 3^2+\cdots\cdots+ & n^2 \\ \ddots\quad & \vdots \\ +) \qquad\qquad & n^2 \\ \hline \end{array}$$

$$1^2+2\cdot2^2+3\cdot3^2+\cdots\cdots+n\cdot n^2$$

$$=1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3 \qquad (\because\ 1^3=1^2 \text{ から})$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^3 \qquad \text{が得られる．}$$

次に，◺ の和を求めるために，各式を下のように斜めに加えると

$$\begin{array}{l} 1^2 \\ 1^2+2^2 \\ 1^2+2^2+3^2 \\ \vdots \\ +)\ 1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2 \\ \hline 1^2+(1^2+2^2)+\cdots\cdots+(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2) \end{array}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \qquad \text{が得られる．}$$

以上のことから

$$\sum_{k=1}^{n}k^3+\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=(n+1)\sum_{k=1}^{n}k^2 \quad \cdots ②$$

が成り立つ．

左辺を整理すると

$$\sum_{k=1}^{n}k^3+\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^3+3k^2+k}{6}=(n+1)\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}k^3+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k=(n+1)\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$\frac{4}{3}\sum_{k=1}^{n}k^3=(n+1)\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\left\{(n+1)-\frac{1}{2}\right\}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{1}{6}\times\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)^2}{12}-\frac{n(n+1)}{12}$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{3}$$

よって，

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{3}{4}\times\frac{n^2(n+1)^2}{3}$ から

ゆえに $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3$ の公式を求めた同様の方法で，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^m$ について，成り立つ式を導く．

3 $\sum_{k=1}^{n} k^m$ について

$\sum_{k=1}^{n} k^{m-1}$ を $(n+1)$ 個加えた $(n+1)\sum_{k=1}^{n} k^{m-1}$ から

$$
\begin{array}{l}
(n+1) \\
\text{個の和}
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
\sum_{k=1}^{n} k^{m-1} = 1^{m-1}+2^{m-1}+\cdots\cdots+n^{m-1} \\
\sum_{k=1}^{n} k^{m-1} = 1^{m-1}+2^{m-1}+\cdots\cdots+n^{m-1} \\
\qquad\qquad\qquad\vdots \\
\sum_{k=1}^{n} k^{m-1} = 1^{m-1}+2^{m-1}+\cdots\cdots+n^{m-1}
\end{array}
\right.
$$

$\sum_{k=1}^{n} k^m$ の公式を求めることを考える.

そこで，上の $\boxed{\;}$ を下のように2つに分け，それぞれの和を求める.

$$
\begin{array}{l}
1^{m-1}+2^{m-1}+3^{m-1}+\cdots\cdots+n^{m-1} \\
1^{m-1}+2^{m-1}+3^{m-1}+\cdots\cdots+n^{m-1} \\
\vdots \\
1^{m-1}+2^{m-1}+3^{m-1}+\cdots\cdots+n^{m-1} \\
1^{m-1}+2^{m-1}+3^{m-1}+\cdots\cdots+n^{m-1}
\end{array}
\quad (m \geqq 2)
$$

まず，の和を求めるために，各式を下のように列ごとに加えると

$$
\begin{array}{r}
1^{m-1}+2^{m-1}+3^{m-1}+\cdots\cdots+ \; n^{m-1} \\
2^{m-1}+3^{m-1}+\cdots\cdots+ \; n^{m-1} \\
3^{m-1}+\cdots\cdots+ \; n^{m-1} \\
\vdots \\
+) \qquad\qquad\qquad\qquad n^{m-1} \\
\hline
1^{m-1}+2\cdot 2^{m-1}+3\cdot 3^{m-1}+\cdots\cdots+n\cdot n^{m-1}
\end{array}
$$

$=1^m+2^m+3^m+\cdots\cdots+n^m \qquad (\because\ 1^m=1^{m-1}$ から$)$

$=\sum_{k=1}^{n} k^m$ 　　が得られる.

次に，の和を求めるために，各式を下のように斜めに加えると

$$
\begin{array}{l}
1^{m-1} \\
1^{m-1}+2^{m-1} \\
1^{m-1}+2^{m-1}+3^{m-1} \\
\vdots \\
+)\ 1^{m-1}+2^{m-1}+3^{m-1}+\cdots\cdots+n^{m-1} \\
\hline
1^{m-1}+(1^{m-1}+2^{m-1})+\cdots\cdots+(1^{m-1}+2^{m-1}+3^{m-1} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad +\cdots\cdots+n^{m-1})
\end{array}
$$

$=\sum_{l=1}^{n}(1^{m-1}+2^{m-1}+3^{m-1}+\cdots\cdots+l^{m-1})$

$=\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l} k^{m-1}\right)$ 　　が得られる.

以上のことから

$$\sum_{k=1}^{n} k^m+\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l} k^{m-1}\right)=(n+1)\sum_{k=1}^{n} k^{m-1}$$

よって

$$\sum_{k=1}^{n} k^m=(n+1)\sum_{k=1}^{n} k^{m-1}-\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l} k^{m-1}\right) \quad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ. 　　$(m \geqq 2)$

また，③式に $m=1$ を代入すると

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k &=(n+1)\sum_{k=1}^{n} k^0-\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l} k^0\right) \\
&=(n+1)\sum_{k=1}^{n} 1-\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l} 1\right) \\
&=(n+1)\times n-\sum_{l=1}^{n} l
\end{aligned}
$$

よって

$$\sum_{k=1}^{n} k+\sum_{l=1}^{n} l=n(n+1)$$

$$2\sum_{k=1}^{n} k=n(n+1) \quad \left(\because\ \sum_{l=1}^{n} l=\sum_{k=1}^{n} k \text{ から}\right)$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$$

以上のことから ③式は $m=1$ で成り立つ.

すなわち，すべての自然数 m について

$$\sum_{k=1}^{n} k^m=(n+1)\sum_{k=1}^{n} k^{m-1}-\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l} k^{m-1}\right)$$

が成立することになる.

ゆえに，③式により，すべての自然数について，和の公式を求めることができる.

③式を用いて，実際に $\sum_{k=1}^{n} k^4$ の公式を求めてみる. ③式に $m=4$ を代入すると

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^4 &=(n+1)\sum_{k=1}^{n} k^3-\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l} k^3\right) \\
&=(n+1)\times\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\sum_{l=1}^{n}\frac{l^2(l+1)^2}{4} \\
&=\frac{n^2(n+1)^3}{4}-\sum_{l=1}^{n}\frac{l^4+2l^3+l^2}{4} \\
&=\frac{n^2(n+1)^3}{4}-\frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n} l^4-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} l^3-\frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n} l^2
\end{aligned}
$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4+\frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n} l^4=\frac{n^2(n+1)^3}{4}-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} l^3-\frac{1}{4}\sum_{l=1}^{n} l^2$$

$$\frac{5}{4}\sum_{k=1}^{n} k^4=\frac{n^2(n+1)^3}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$-\frac{1}{4}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\left(\because\ \sum_{l=1}^{n} l^4=\sum_{k=1}^{n} k^4\ \text{から}\right)$$

$$=\frac{n(n+1)}{24}\{6n(n+1)^2-3n(n+1)-(2n+1)\}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{24}$$

$\sum_{k=1}^{n} k^4=\frac{4}{5}\times\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{24}$ から

ゆえに $\sum_{k=1}^{n} k^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

(注) 本文中の ①, ② 式は, ③ 式の $m=2, 3$ の場合に他ならない.

§ おわりに

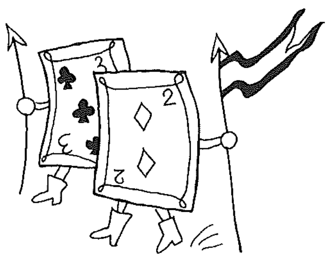
③ 式が, すべての自然数で成立することを厳密には数学的帰納法等で証明すべきところでありますが, ここでの目的を和の公式 $\sum_{k=1}^{n} k^m$ を求めるための式を導くことにしているので, 証明は省略させていただきます.

また, ③ 式を変形すると

$$\sum_{k=1}^{n} k^m=\frac{n(n+1)^m}{2}-\sum_{l=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{l}\frac{k\{(n+1)^{m-1}-k^{m-1}\}}{(n+1)-k}\right]$$

が得られることを付け加えておきます.

(埼玉県立志木高等学校)



♤♧♡◇♤♧♡◇♤♧♡◇♤♧♡◇♤♧♡◇