Proposition の（再）発見の方法について

柳田　五夫

Proposition の（再）発見の方法について具体的に述べてみたい．

1 Proposition 1　a, b を実数とするとき

$$\max(|a|,\ |b|)=\frac{|a+b|+|a-b|}{2} \quad \cdots\cdots (1)$$

が成り立つ．

(1) をどのようにして得たかについて述べる．

$f(s,\ t)=\max(|s|,\ |t|)$ とおくと

$$f(-s,\ t)=f(s,\ -t)=f(-s,\ -t)=f(s,\ t) \quad \cdots\cdots (2)$$

$$f(s,\ t)=f(t,\ s) \quad \cdots\cdots (3)$$

が成り立つ．$\max(s,\ t)=\dfrac{s+t+|s-t|}{2}$ であるから

$$g(s,\ t)=\frac{s+t+|s-t|}{2}$$

とおくと $s\geqq 0$, $t\geqq 0$ のとき

$f(s,\ t)=g(s,\ t)$ が成り立つ．

また　$g(s,\ t)=g(t,\ s)$ は成り立つが

$g(s,\ -t)=\dfrac{s-t+|s+t|}{2}$ は $g(s,\ t)$ に等しくはないが，$g(s,\ t)$ とよく見比べて

$h(s,\ t)=\dfrac{|s+t|+|s-t|}{2}$ を導入すれば

$$h(-s,\ t)=h(s,\ -t)=h(-s,\ -t)=h(s,\ t) \quad \cdots\cdots (2)'$$

$$h(s,\ t)=h(t,\ s) \quad \cdots\cdots (3)'$$

が成り立つ．$s\geqq 0$, $t\geqq 0$ のとき明らかに

$$f(s,\ t)=h(s,\ t) \quad \cdots\cdots (4)$$

となる．(2), (2)′ を用いるとすべての s, t について (4) が成立することがわかる．なぜなら，たとえば $s\geqq 0$, $t\leqq 0$ のとき

$s\geqq 0$, $-t\geqq 0$ であるから $f(s,\ -t)=h(s,\ -t)$ が成り立つ．

(2), (2)′ を用いると

$$f(s,\ t)=f(s,\ -t),\quad h(s,\ t)=h(s,\ -t)$$

であるから

$$f(s,\ t)=f(s,\ -t)=h(s,\ -t)=h(s,\ t)$$

すなわち　　$f(s,\ t)=h(s,\ t)$

となる．

Proposition 1 は次の問題を考えている時（1976年）に気づいたものである．

> xy 平面で，次の 2 つの集合が一致することを証明せよ．ただし，a, b は相異なる実数の定数とし，記号 $\max(\alpha,\ \beta)$ は α, β のうち小さくないほうを表すものとする．
>
> $\mathrm{S}=\{(x,\ y)|\max(|x-a|,\ |y-b|)$
> $=\max(|x-b|,\ |y-a|)\}$
>
> $\mathrm{T}=\{(x,\ y)|x=y\}$

ここでは，$a<b$ とし，次の 2 つの集合

$\mathrm{U}=\{(x,\ y)|\max(|x-a|,\ |y-b|)$
$<\max(|x-b|,\ |y-a|)\}$

$\mathrm{V}=\{(x,\ y)|x<y\}$

が一致することを証明しておく．

Proposition 1 から

$$\max(|x-a|,\ |y-b|)<\max(|x-b|,\ |y-a|)$$

$$\iff |(x-a)+(y-b)|+|(x-a)-(y-b)|$$
$$<|(x-b)+(y-a)|+|(x-b)-(y-a)|$$

$$\iff |(x-y)-(a-b)|<|(x-y)+(a-b)|$$

$$\iff |(x-y)-(a-b)|^2<|(x-y)+(a-b)|^2$$

$$\iff (a-b)(x-y)>0$$

$$\iff x-y<0 \quad (\because\ a-b<0)$$

$$\iff x<y$$

ゆえに　U=V

次に Proposition 1 の適用例をみる．

> $|a|<1$ かつ $|b|<1$ ならば $|a+b|+|a-b|<2$ であることを証明せよ．ただし a, b は実数とする．　(81 お茶の水大)

$|a+b|+|a-b|=2\max(|a|,\ |b|)<2$
($\because$ $|a|<1$, $|b|<1$) とすれば証明できる．

> a と b は実数とする．
> (1) $(|a+b|+|a-b|)^2$ を簡単にすることにより，$|a|\geqq|b|$ の場合，$|a|<|b|$ の場合それぞれについて，$|a+b|+|a-b|$ を $|a|$ または $|b|$ を用いて表せ．
> (2) $|a+b|+|a-b|<1$ のとき，$3a-4b$ と $2-6ab$ の大小を比較せよ．(85 福岡大・法)

(1) は Proposition 1 の証明そのものが問題となっている．

> プロ野球が開幕して早くもひと月，ペナントレースの行方はまだまだこれからといったところです．とくに昨年のセ・リーグは，中日のふんばり，ヤクルトの沈滞と，評論家諸氏の予想通りには事が運びませんでしたが，今年はいかに？
> そこで，評論家を‘評価’する査定方法として，各球団について，予想順位と実際の順位との差（絶対値）をとり，その総和を‘罰点’とすることにします．このとき，罰点の最大値がどれくらいになってしまうのかを考えてみましょう．
> 6 球団のうちに同順位のものがないとすれば，これは，
> $P=|a-1|+|b-2|+|c-3|+|d-4|+|e-5|+|f-6|$
> $\{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$
> に対する P の最大値を考えることになりますが，P の大小をいきなり調べるのもタイヘンですから，まず，準備として，
> $x>y$, $p>q$ のとき，
> $|x-q|+|y-p|\geqq|x-p|+|y-q|$ … (A)
> を示しましょう．いま，任意の実数 s, t に対して
> $|s|+|t|=\max(|s+t|,\ |s-t|)$ ←
> が成り立つので，
> $|x-q|+|y-p|=\max(\boxed{①},\ \boxed{②})$
> $|x-p|+|y-q|=\max(\boxed{①},\ \boxed{③})$
> と書け，ここに
> $x>y$, $p>q$ のとき，②>③　…… (B)
> が成り立ちますから，(A) が言えます．
> したがって，(A) を用いると，
> $\left.\begin{array}{l} a=\boxed{④},\ b=\boxed{⑤},\ c=\boxed{⑥} \\ d=\boxed{⑦},\ e=\boxed{⑧},\ f=\boxed{⑨} \end{array}\right\}$ …… (C)
> のときに，P は最大値 $\boxed{⑩}$ をとることがわかります．
> なお，$P=\boxed{⑩}$ となる $a\sim f$ の組は，(C) を含めて全部で $\boxed{⑪}$ 通りあります．
> [問] ①～⑪ に適当な数または式を記入し，(B) が成り立つ理由を簡単に説明しなさい．
> (大学への数学 1980 年 5 月号)

Proposition 1 において　$a=s+t$, $b=s-t$　とおくと

$$\max(|s+t|,\ |s-t|)=\frac{|(s+t)+(s-t)|+|(s+t)-(s-t)|}{2}=\frac{2|s|+2|t|}{2}=|s|+|t|$$

を得る．

ところでこの式は次のように証明することもできる．$p\geqq0$, $q\geqq0$ のとき $\{\max(p,\ q)\}^2=\max(p^2,\ q^2)$ が成り立つから，

$$\begin{aligned}\{\max(|s+t|,\ |s-t|)\}^2&=\max(|s+t|^2,\ |s-t|^2)\\&=\max(s^2+t^2+2st,\ s^2+t^2-2st)\\&=s^2+t^2+2\max(st,\ -st)\\&=s^2+t^2+2|st|\\&=(|s|+|t|)^2\end{aligned}$$

$\max(|s+t|,\ |s-t|)\geqq0$, $|s|+|t|\geqq0$ であるから $\max(|s+t|,\ |s-t|)=|s|+|t|$ が成り立つ．

② Proposition 2　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$, n が自然数のとき

$$\cos^n\theta+\sin^n\theta\geqq(\sqrt{2}\,)^{3-n}\sqrt{\cos\theta\sin\theta}\quad\cdots(1)$$

が成り立つ．

> 正の数 x, y が $x+y+\sqrt{x^2+y^2}=2$ を満足するとき，xy を最大にする x, y の値を求めよ．

この問題は $x+y=u$, $xy=v$ とおくと
$u+\sqrt{u^2-2v}=2$ から $v=2u-2$ $(1<u\leqq2)$ を得る．

$u^2-4v\geqq 0$ から u の値の範囲は $1<u\leqq 4-2\sqrt{2}$ となるから，$u=4-2\sqrt{2}$ のとき v は最大値 $6-4\sqrt{2}$ をとる．したがって $x=y=2-\sqrt{2}$ のとき xy は最大となる．

ところで $\sqrt{x^2+y^2}=r$ とおくと $x^2+y^2=r^2$ で $x>0$，$y>0$ であるから

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad r>0,\quad 0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

とおくことができる．$x+y+r=2$ から

$$r(\cos\theta+\sin\theta+1)=2$$

$$\therefore\quad r=\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta+1}$$

したがって

$$\begin{aligned}xy&=r^2\cos\theta\sin\theta\\&=\frac{4\cos\theta\sin\theta}{(\cos\theta+\sin\theta+1)^2}\\&\left(=\frac{4\cos\theta\sin\theta}{(\cos\theta+\sin\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2}\right)\end{aligned}$$

は前の結果から $\theta=\frac{\pi}{4}$ で最大値をとることになる．

$$f(\theta)=\frac{\sin\theta\cos\theta}{(\cos\theta+\sin\theta+\cos^n\theta+\sin^n\theta)^2}\quad\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

と一般化すると $\theta=\frac{\pi}{4}$ で最大値をとるのではないだろうか．

$f'(\theta)$ の分母は $(\cos\theta+\sin\theta+\cos^n\theta+\sin^n\theta)^3$ 分子は $n=1$ のとき $2(\cos\theta-\sin\theta)$ で $n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}&\cos\theta-\sin\theta+\cos^{n+2}\theta-\sin^{n+2}\theta\\&\quad+(2n-1)\cos^2\theta\sin^2\theta(\cos^{n-2}\theta-\sin^{n-2}\theta)\\&=(\cos\theta-\sin\theta)g_n(\theta)\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\text{ で } g_n(\theta)>0\right)\end{aligned}$$

となるから $f(\theta)$ は $\theta=\frac{\pi}{4}$ で最大値をとる．

$$\text{ゆえに } f(\theta)\leqq f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{\{\sqrt{2}+(\sqrt{2})^{2-n}\}^2}=\frac{1}{\{2+(\sqrt{2})^{3-n}\}^2}$$

これから $(\cos\theta+\sin\theta+\cos^n\theta+\sin^n\theta)^2$

$$\geqq\{2+(\sqrt{2})^{3-n}\}^2\cos\theta\sin\theta$$

$$\therefore\quad \cos\theta+\sin\theta+\cos^n\theta+\sin^n\theta\geqq\{2+(\sqrt{2})^{3-n}\}\sqrt{\cos\theta\sin\theta}\quad\cdots\cdots(2)$$

(2) の $\cos\theta+\sin\theta$ を $\cos^m\theta+\sin^m\theta$ に置き換えると

$$\cos^m\theta+\sin^m\theta+\cos^n\theta+\sin^n\theta\geqq\{(\sqrt{2})^{3-m}+(\sqrt{2})^{3-n}\}\sqrt{\cos\theta\sin\theta}\quad\cdots\cdots(3)$$

がいえそうである．(3) の不等式をよくみると

$$\cos^n\theta+\sin^n\theta\geqq(\sqrt{2})^{3-n}\sqrt{\cos\theta\sin\theta}$$

がいえそうである．

証明は

$$h(\theta)=\frac{\cos\theta\sin\theta}{(\cos^n\theta+\sin^n\theta)^2}\quad\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

とおいて微分して最大値を求めればできる（$f(\theta)$ のときと同様な計算である）．

3 Proposition 3 $a>0$，$b>0$，$c>0$，m と n は整数で少なくとも 1 つは 0 でないものとする．

$P_m^n(a,\ b,\ c)=\dfrac{a^n+b^n-c^n}{a^m}$ とおくと

$$P_m^n(a,\ b,\ c)=P_m^n(b,\ c,\ a)=P_m^n(c,\ a,\ b)\implies a=b=c\quad\cdots\cdots(1)$$

が成り立つ．

> $\triangle ABC$ で $a\cos B=b\cos C=c\cos A$ が成り立つとき，この三角形はどのような三角形か．

余弦定理を使って辺の関係に直すと

$$\frac{c^2+a^2-b^2}{c}=\frac{a^2+b^2-c^2}{a}=\frac{b^2+c^2-a^2}{b}\quad\cdots\cdots(2)$$

となるから，この式の値を λ とおくと

$$a^2+b^2-c^2=\lambda a\quad\cdots\cdots(3)$$

$$b^2+c^2-a^2=\lambda b\quad\cdots\cdots(4)$$

$$c^2+a^2-b^2=\lambda c\quad\cdots\cdots(5)$$

(3)+(4)+(5) から $a^2+b^2+c^2=\lambda(a+b+c)$ となり $\lambda>0$ ところで

(3)−(4) から　$2(a^2-c^2)=\lambda(a-b)$　$\cdots\cdots(3)'$

(4)−(5) から　$2(b^2-a^2)=\lambda(b-c)$　$\cdots\cdots(4)'$

(5)−(3) から　$2(c^2-b^2)=\lambda(c-a)$　$\cdots\cdots(5)'$

$(3)'\times(4)'\times(5)'$ から

$$-8(c^2-a^2)(a^2-b^2)(b^2-c^2)=\lambda^3(a-b)(b-c)(c-a)\text{ を得る．}$$

$(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0$ とすると

$$-8(c+a)(a+b)(b+c)=\lambda^3$$

これから $\lambda<0$ となり $\lambda>0$ であることに矛盾する．ゆえに $(a-b)(b-c)(c-a)=0$ となり，a，b，c のうち少なくとも 1 組は等しい．

たとえば $a=b$ ならば (3)=(4) から $a^2=c^2$ となり，$a=c$ となる．他の場合も同様であるから，三角形は

$a=b=c$，すなわち正三角形に限る．■

(2) を含む命題

$a>0,\ b>0,\ c>0,$

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{a}=\frac{b^2+c^2-a^2}{b}=\frac{c^2+a^2-b^2}{c}$$

$$\Longrightarrow a=b=c$$

を一般化する．

$a>0,\ b>0,\ c>0$ で m と n は自然数とする．

$$\frac{a^n+b^n-c^n}{a^m}=\frac{b^n+c^n-a^n}{b^m}=\frac{c^n+a^n-b^n}{c^m}$$

$$\Longrightarrow a=b=c \quad \cdots\cdots (6)$$

が成り立つことが類推できる．実際この場合は前述の証明方法がそのまま使える．ここで，

$$P^n_m(a,\ b,\ c)=\frac{a^n+b^n-c^n}{a^m}$$

（m と n は整数とする）

を導入する．m と n が負の整数のときは，

$$P^n_m(a,\ b,\ c)=\frac{(a^{-1})^{-n}+(b^{-1})^{-n}-(c^{-1})^{-n}}{(a^{-1})^{-m}}$$

$$=P^{-n}_{-m}\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right)$$

であるから

$P^n_m(a,\ b,\ c)=P^n_m(b,\ c,\ a)=P^n_m(c,\ a,\ b)$

が成り立つとき

$\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ から $a=b=c$ を得る．

また m と n のどちらか一方だけが 0 のときも (6) は成り立つから，$m<0,\ n>0$（または $m>0,\ n<0$）の場合を考えてみる．

$m<0,\ n>0$ のときは一般性を失うことなく $a\geqq b\geqq c$ と仮定することができる．

$P^n_m(a,\ b,\ c)=P^n_m(b,\ c,\ a)=P^n_m(c,\ a,\ b)=\lambda$ とおくと

$$a^n+b^n-c^n=\lambda a^m \quad \cdots\cdots (3)''$$

$$b^n+c^n-a^n=\lambda b^m \quad \cdots\cdots (4)''$$

$$c^n+a^n-b^n=\lambda c^m \quad \cdots\cdots (5)''$$

(3)″, (4)″ から

$$a^n\leqq a^n+(b^n-c^n)=\lambda a^m \quad \therefore\ a^{n-m}\leqq\lambda$$

$$b^n\geqq b^n+(c^n-a^n)=\lambda b^m \quad \therefore\ b^{n-m}\geqq\lambda$$

を得る．これらから $a^{n-m}\leqq\lambda\leqq b^{n-m}$ となるが，$n-m>0$, $a\geqq b$ より $a^{n-m}\geqq b^{n-m}$ であるから $a^{n-m}=b^{n-m}$ すなわち $a=b$ となる．あとは (3)″=(4)″ から $a=c$ を得る．

$m>0,\ n<0$ のときは

$$P^n_m(a,\ b,\ c)=P^{-n}_{-m}\left(\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\right)$$

とすれば $-m<0,\ -n>0$ の場合が適用できる．

(4) Proposition 4　関数 f：D×D ⟶ R が次の条件を満たしている（D は R の部分集合）．

（i）$f(x,\ y)$ は y に関して減少

（ii）$f(x,\ y)$ は x に関して増加

このとき，$f(x_1,\ x_2)=f(x_2,\ x_3)=\cdots\cdots$
$=f(x_{n-1},\ x_n)=f(x_n,\ x_1)$

を満たすならば $x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n$ となる．

(3) の三角形の問題を角の関係から見直してみる．正弦定理を用いると

$\sin A\cos B=\sin B\cos C=\sin C\cos A$ ····· (1)

(1) の式の値が負または 0 ならば $\cos B\leqq 0$,

$\cos C\leqq 0,\ \cos A\leqq 0$　すなわち　$A\geqq\frac{\pi}{2},\ B\geqq\frac{\pi}{2},$

$C\geqq\frac{\pi}{2}$ となり

$A+B+C\geqq\frac{3}{2}\pi>\pi$ であるから $A+B+C=\pi$ に矛盾する．

よって $\cos A>0,\ \cos B>0,\ \cos C>0$ から

$$0<A,\ B,\ C<\frac{\pi}{2}$$

となる．$f(x,\ y)=\sin x\cos y,\ 0<x<\frac{\pi}{2},\ 0<y<\frac{\pi}{2}$ という関数 f を考えると

（i）$f(x,\ y)$ は y に関して減少

（ii）$f(x,\ y)$ は x に関して増加　であることがわかる．**(3)** の問題の結果から

$f(A,\ B)=f(B,\ C)=f(C,\ A)$ ならば $A=B=C$ がいえそうで，これを一般化したものが Proposition 4 である．

$f(x,\ y)$ は（i）（ii）を満たすものとする．

(1°)　$x<y\Longrightarrow f(x,\ y)<f(y,\ x)$ ······ (2)

$f(x,\ y)\leqq f(y,\ x)\Longrightarrow x\leqq y$ ······ (3)

$f(x,\ y)=f(y,\ x)\Longrightarrow x=y$ ······ (4)

（証明）$x<y$ のとき $f(x,\ y)<f(x,\ x)$（∵（i））
$<f(y,\ x)$（∵（ii））

(2) から $y<x\Longrightarrow f(y,\ x)<f(x,\ y)$ が成り立つ．対偶をとると (3) となる．

$f(x,\ y)=f(y,\ x)\Longleftrightarrow f(x,\ y)\leqq f(y,\ x)$ かつ
$f(x,\ y)\geqq f(y,\ x)$

$$\Longrightarrow x\leqq y \quad \text{かつ} \quad x\geqq y$$
$$\Longrightarrow \quad x=y$$

$x=y$ のとき明らかに $f(x, y)=f(y, x)$ であるから (4) は成り立つ. ■

(2°) $f(x, y)=f(y, z)$ とする.

$$x\leqq y\Longrightarrow y\leqq z \qquad \cdots\cdots (5)$$
$$x\geqq y\Longrightarrow y\geqq z \qquad \cdots\cdots (6)$$

(証明) $x\leqq y$ とすると (2) から $f(x, y)\leqq f(y, x)$

$$\therefore \quad f(y, z)\leqq f(y, x)$$

(i) から $x>z$ と仮定すると $f(y, z)>f(y, x)$ となり矛盾. よって $x\leqq z$ であるから (ii) により $f(x, y)\leqq f(z, y)$ が成り立つから,

$$f(y, z)=f(x, y)\leqq f(z, y)$$
$$\therefore\ f(y, z)\leqq f(z, y) \quad \text{(3) から} \quad y\leqq z$$

(6) の証明は (5) の証明と同様である. ■

(3°) (Proposition 4 の証明)

$$f(x_1, x_2)=f(x_2, x_3)=\cdots\cdots=f(x_{n-1}, x_n)$$
$$=f(x_n, x_1)$$

が成り立つから $x_1\leqq x_2$ とすると (5) から

$$x_1\leqq x_2\leqq x_3\leqq\cdots\cdots\leqq x_n\leqq x_1$$
$$\therefore \quad x_1=x_2=x_3=\cdots\cdots=x_n$$

$x_1\geqq x_2$ のときは (6) から

$$x_1\geqq x_2\geqq x_3\geqq\cdots\cdots\geqq x_n\geqq x_1$$
$$\therefore \quad x_1=x_2=x_3=\cdots\cdots=x_n$$

■

5 Proposition 5 D を数直線上の区間とし,
関数 f : D×D ⟶ D
が, 次の条件を満たすものとする.
(i) $f(x, y)$ は y に関して増加
(ii) $f(x_1, y_1)+f(x_2, y_2)\leqq f(x_1+x_2, y_1+y_2)$
このとき, $f_2=f$ とし, $n\geqq 3$ に対して帰納的に

$$f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)=f(x_1, f_{n-1}(x_2, \cdots, x_n))$$

と定義すると

$$f_n(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)+f_n(y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n)$$
$$\leqq f_n(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots\cdots, x_n+y_n)$$

が成り立つ.

> x, y, z は共に正の実数で, $x\leqq y+z$ を満たすとき, 次の S, T, U の大小を定めよ.
>
> $$S=\frac{x}{1+x}, \quad T=\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}, \quad U=\frac{y+z}{1+y+z}$$
>
> (86 甲南大・経)

結果は $S\leqq U<T$ となる. $g(x)=\dfrac{x}{1+x}$ $(x>0)$ とおくと $g(x)=1-\dfrac{1}{x+1}$ により $g(x)$ は $(0, \infty)$ で増加関数であるから $S\leqq U$ を得る. $U<T$ は $g(y)+g(z)>g(y+z)$ と同値である.

$g(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$ $(x>0)$ に対して $f(x, y)=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}$ $(x>0, y>0)$ と2変数関数を考えると, $g(y)+g(z)>g(y+z)$ に対応する式が $f(x_1, y_1)+f(x_2, y_2)\leqq f(x_1+x_2, y_1+y_2)$ となる (不等号の向きが g とは逆になる. 更に n 変数に拡張したものが Proposition 5 である). 証明は n に関する帰納法で容易に示すことができる.

6 Proposition 6

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots\cdots & n \\ -2 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & O \\ O & & & & \\ & & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \cdots\cdots (1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots\cdots & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & O \\ O & & & & \\ & & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=-\frac{n^2(n^2-1)}{12} \qquad \cdots\cdots (2)$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots\cdots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots\cdots & n+2 \\ 4 & 5 & 6 & \cdots\cdots & n+3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots\cdots & 2n \end{pmatrix}$$

の固有値を求めているときに得た結果である.

$$D=|A-\lambda E|$$
$$=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 4 & \cdots\cdots & n+1 \\ 3 & 4-\lambda & 5 & \cdots\cdots & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots\cdots & 2n-\lambda \end{vmatrix}$$

において, 第 n 行から第 $n-1$ 行を引き, 第 $n-1$ 行から第 $n-2$ 行を引き, ……, 第2行から第1行を引

く．次に第n行から第$n-1$行を引き，第$n-1$行から第$n-2$行を引き，……，第3行から第2行を引くと，

$$D=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 4 & \cdots\cdots & n+1 \\ 1+\lambda & 1-\lambda & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ -\lambda & 2\lambda & -\lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & O \\ O & & -\lambda & 2\lambda & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(-\lambda)^{n-2}\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 4 & \cdots\cdots & n+1 \\ 1+\lambda & 1-\lambda & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & O \\ O & & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

固有値を 0（$n-2$ 重根），α, β とおくと

$$\alpha+\beta=Tr(A)=n(n+1)$$

となる．Frobenius の定理から A^2 の固有値は α^2, β^2, 0（$n-2$ 重根）であるから，$\alpha^2+\beta^2=Tr(A^2)$ である．$A^2=(a_{ij})$ とおくと

$$a_{kk}=(k+1)^2+(k+2)^2+\cdots\cdots+(k+n)^2$$
$$=nk^2+n(n+1)k+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

となるから，

$$Tr(A^2)=\sum_{k=1}^{n}a_{kk}=\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{3}+\frac{n^2(n+1)^2}{2}$$

をえる．

これらから $2\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2-(\alpha^2+\beta^2)$

$$=n^2(n+1)^2-Tr(A^2)$$
$$=-\frac{n^2(n^2-1)}{6}$$

となり α, β が求まることになる．

Frobenius の定理を使わずに固有値をだすことを考える．

$|A-\lambda E|=(-\lambda)^{n-2}\{\lambda^2-n(n+1)\lambda+a_n\}$ とおけるから，この等式の両辺を $(-\lambda)^{n-2}$ で割って $\lambda=0$ とおけば

$$a_n=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots\cdots & n+1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & O \\ O & & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

を得る（第1行から第2行を引くと(2)の左辺になる）．

第1行から第2行の2倍を引いたのち第1列で展開すると

$a_n=(-1)^{2+1}D'+(-1)^{3+1}a_{n-1}$ となる．D' は(1)の左辺の式とする．D' は容易に求まるから，a_n も簡単に求まる．

＜参　考　文　献＞

1．大学への数学　1976年6月号
2．　〃　　　　　1980年5月号
3．数学セミナー　1980年12月号
4．　〃　　　　　1980年9月号
5．　〃　　　　　1982年5月号

（栃木県立栃木高等学校）