n! の素因数分解について

えんどう　かずなり
遠藤　一成

なかじま　まさひこ
中島　政彦

1　はじめに

1991 年 1 月 15 日に行われた日本数学オリンピック予選の問題から，n! を素因数分解したときの 2 の指数に関して面白い結果を得たのでここで紹介したい．

2　主定理

まず，予選問題 6 を考えよう．

問題

非負整数 n に対して，

$f(0)=0,\ f(1)=1$

$$f(n)=f\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right)+n-2\left[\frac{n}{2}\right]$$

によって $f(n)$ を定める．$0\leqq n\leqq 1991$ における $f(n)$ の最大値を求めよ．ここに $[x]$ は，x を越えない最大整数を表す．

実は，この関数 $f(n)$ は n を 2 進数で表したときの各桁数の和に等しい．

証明　数学的帰納法を用いる．

$n=0,\ 1$ のとき成り立つことは明らか．

$n\leqq k-1$ のとき成り立つことを仮定する．

$n=k$ のとき，$k_{(+)}=a_1\cdots a_1\cdot a_{0(\text{二})}$

つまり，$k=a_p2^p+\cdots\cdots+a_12+a_0$ とすれば

$$f(k)=f\left(\left[\frac{k}{2}\right]\right)+k-2\left[\frac{k}{2}\right]$$

$$=f(a_p2^{p-1}+\cdots\cdots+a_1)+k-2\times\frac{k-a_0}{2}$$

帰納法の仮定から

$$=a_p+\cdots\cdots+a_1+k-k+a_0$$

$$=a_p+\cdots\cdots+a_1+a_0$$

さて，本論に入ろう．

定義　自然数 n に対して，n を割りきる 2 の巾 2^i のうち最大の i を $N(n)$ で表す．

性質　$m,\ n$ を任意の自然数とする．

(1)　$N(mn)=N(m)+N(n)$

(2)　$\dfrac{m}{n}$ が整数のとき，

$$N\left(\frac{m}{n}\right)=N(m)-N(n)$$

(3)　自然数 p に対して

$$N(2^p!)=2^p-1$$

証明　(1)(2) は自明である．

(3) を数学的帰納法により証明する．

$p=1$ のとき成り立つことは明らか．

$p=k$ のとき

$$N(2^k!)=2^k-1$$

が成立することを仮定する．

$p=k+1$ のとき

$N(2^{k+1}!)$

$$=N(2^k!(2^k+1)(2^k+2)\cdots\cdots(2^k+2^k))$$

性質 (1) から

$$=N(2^k!)$$
$$+N((2^k+1)\cdots\cdots(2^k+2^k-1))$$
$$+N(2^k+2^k)$$

ここで

$$N(2^k+i)=\begin{cases}N(i) & 1\leqq i\leqq 2^k-1\\ k+1 & i=2^k\end{cases}$$

であるから

$$=N(2^k!)+N((2^k-1)!)+N(2^{k+1})$$

性質 (2) と帰納法の仮定から

$$=(2^k-1)+(2^k-1)-k+(k+1)$$

$$=2^{k+1}-1$$

また，次の定理が成り立つ．

定理　任意の自然数 n に対して,

$$N(n!)=n-f(n)$$

証明　数学的帰納法を用いる.

$n=1$ のとき，成り立つことは自明.

$n \leqq k-1$ のとき，成り立つことを仮定する.

$n=k$ のとき，（前出のように）k を 2 進数で表せば,

$$
\begin{aligned}
N(k!)&\\
&=N((a_p2^p+\cdots\cdots+a_12+a_0)!)\\
&=N((a_p2^p)!(a_p2^p+1)\times\cdots\cdots\\
&\qquad\times(a_p2^p+a_{p-1}2^{p-1}+\cdots\cdots+a_0))\\
&=N((a_p2^p)!)\\
&\qquad+N((a_p2^p+1)\cdots(a_p2^p+a_{p-1}2^{p-1}+\cdots\\
&\qquad\qquad+a_0))\\
&=N((a_p2^p)!)\\
&\qquad+N(1\cdot2\cdots\cdots(a_{p-1}2^{p-1}+\cdots\cdots+a_12+a_0))
\end{aligned}
$$

性質 3 と帰納法の仮定から

$$
\begin{aligned}
&=a_p(2^p-1)+a_{p-1}2^{p-1}+\cdots\cdots+a_12+a_0\\
&\qquad-(a_{p-1}+\cdots\cdots+a_1+a_0)\\
&=a_p2^p+a_{p-1}2^{p-1}+\cdots\cdots+a_12+a_0\\
&\qquad-(a_p+a_{p-1}+\cdots\cdots+a_1+a_0)\\
&=k-f(k)
\end{aligned}
$$

3 応用

この定理により，1988 年に行われたスペイン国内数学オリンピックに出題された次の問題を容易に証明できる.

問題

任意の正の整数 n に対し,

$$(n+1)(n+2)\cdots\cdots(2n-1)(2n)$$

は 2^n で割り切れることを示せ.

証明　与式$=A$ とおくと $N(A)=n$ を示せばよい.

$$N(A)=N\left(\frac{(2n)!}{n!}\right)$$

性質 (2) から

$$=N((2n)!)-N(n!)$$

定理から

$$=2n-f(2n)-\{n-f(n)\}$$

ここで，$f(n)$ は n を 2 進数で表したときの各桁数の和であるから，$f(2n)=f(n)$

以上から

$$N(A)=n$$

4 おわりに

p を素数とするとき

$f_p(n)=n$ を p 進数で表したときの各桁数の和

$N_p(n)=n$ を割り切ることのできる p の巾 p^i のうち最大の i

と定義すれば，定理の拡張

$$N_p(n!)=\{n-f_p(n)\}\times\frac{1}{p-1}$$

も成り立つ.

（愛知県 滝高等学校）