平面の媒介変数表示の一方法

田村 隆（たむら たかし）

数学科の教材として，空間図形をパソコンを用いて画面表示することは効果的ですから，各学校でいろいろなプログラムが工夫されていると思われます．ここでは，平面の画面表示を問題にしてみます．

通常，平面 $ax+by+cz+d=0$ を表示するプログラムでは，最初に，係数 a, b, c のうち0でないものを探します．例えば，涌井氏「代数・幾何パソコン学習法」の中では，$c \neq 0$ の場合のみを扱い，平面の方程式を

$$z=-\frac{a}{c}x-\frac{b}{c}y-\frac{d}{c}$$

と変形して，変数 x, y の値に対応してきまる点 (x, y, z) を画面表示する方法をとっています．ただし，更に $c=0$ のときも考えると，$b \neq 0$ の場合と $b=0$ の場合が起こり，やや複雑になります．

私が数学の授業で実際，平面を画面表示している方法を，証明をつけて以下に紹介してみます．

空間座標において平面は，x, y, z に関する1次方程式 $ax+by+cz+d=0$ で表されるが，係数 a, b, c の値にかかわらず，平面上の点をすべて2つの媒介変数を用いて表す方法を考えてみよう．

まず，原点を通る平面から出発して段階的に考察して結論を導くことにする．

原点を通る平面の方程式を $ax+by+cz=0$ とすれば，$a^2+b^2+c^2>0$ である．そこで 以下 $k=a^2+b^2+c^2$ とおくことにする．

I．平面 $ax+by+cz=0$ に関して，

$$x_1=-b\left(1+\frac{a}{k}\right),\ y_1=1+a-\frac{b^2}{k},\ z_1=-\frac{bc}{k}$$

$$x_2=-c\left(1+\frac{a}{k}\right),\ y_2=-\frac{bc}{k},\ z_2=1+a-\frac{c^2}{k}$$

とおくと，2点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$ は，この平面上の点である．

（証明） $ax_1+by_1+cz_1$

$$=-ab\left(1+\frac{a}{k}\right)+b\left(1+a-\frac{b^2}{k}\right)+c\left(-\frac{bc}{k}\right)$$

$$=b-\frac{b}{k}(a^2+b^2+c^2)=b-b=0$$

同様にして，$ax_2+by_2+cz_2=0$ となる．（証明終）

II．平面 $ax+by+cz=0$ において，$a \geqq 0$ とする（この仮定は一般性を失わない）．このとき，I．で求めた2点 P_1, P_2 は相異なる点で，また，いずれも原点と一致するようなことは起こり得ない．

（証明） もし $a<0$ のときには，$-a, -b, -c$ を改めて a, b, c と書けばよいので，初めから $a \geqq 0$ と仮定しておくことにする．

次のように，3次の行列式を考えてみる．

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a & b & c \\ -b-\left(\frac{b}{k}\right)a & 1+a-\left(\frac{b}{k}\right)b & -\left(\frac{b}{k}\right)c \\ -c-\left(\frac{c}{k}\right)a & -\left(\frac{c}{k}\right)b & 1+a-\left(\frac{c}{k}\right)c \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a & b & c \\ -b & 1+a & 0 \\ -c & 0 & 1+a \end{vmatrix}$$

$=a(1+a)^2+b^2(1+a)+c^2(1+a)$

$=(1+a)(a+a^2+b^2+c^2)$

$=(1+a)(a+k)$

しかるに，$k>0$，$a \geqq 0$ であるから

$$(1+a)(a+k)>0$$

である．このことから，3つのベクトル (a, b, c)，(x_1, y_1, z_1)，(x_2, y_2, z_2) は，1次独立となり，特に $\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$ が1次独立となってII．の内容が証明されたことになる．（証明終）

平面上のこの2点 P_1, P_2 の座標を用いて，

III. 平面 $ax+by+cz=0$ $(a\geqq 0)$ は，2個の媒介変数を s, t として，

$$x=x_1s+x_2t,\quad y=y_1s+y_2t,\quad z=z_1s+z_2t$$

と表示される．

(証明) 平面上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とすれば，1次独立な $\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}$ によって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}+t\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}\quad(s,\ t \text{ は実数})$$

と表されるので，

$$x=x_1s+x_2t,\quad y=y_1s+y_2t,\quad z=z_1s+z_2t$$

である． (証明終)

一般の平面の方程式 $ax+by+cz+d=0$ においても $a\geqq 0$ を仮定してよい．原点を通り，この平面に垂直な直線と平面との交点 $\mathrm{P_0}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を求めると，$k=a^2+b^2+c^2$ として

$$x_0=-\frac{ad}{k},\quad y_0=-\frac{bd}{k},\quad z_0=-\frac{cd}{k}$$

である．平面 $ax+by+cz+d=0$ は，平面 $ax+by+cz=0$ を x 軸，y 軸，z 軸の正方向にそれぞれ，x_0, y_0, z_0 だけ平行移動したものであるから，次の結論が得られる．

(定理) 平面 $ax+by+cz+d=0$ $(a\geqq 0)$ は，媒介変数 s, t を用いて

$$\begin{cases} x=x_0+x_1s+x_2t \\ \quad =-\dfrac{1}{k}\{ad+(a+k)bs+(a+k)ct\} \\ y=y_0+y_1s+y_2t \\ \quad =-\dfrac{1}{k}\{bd+(b^2-k-ak)s+bct\} \\ z=z_0+z_1s+z_2t \\ \quad =-\dfrac{1}{k}\{cd+bcs+(c^2-k-ak)t\} \end{cases}$$

と表される．

(例1) $x+2y+z-6=0$

$k=1^2+2^2+1^2=6$

$$\begin{cases} x=-\dfrac{1}{6}\{-6+(1+6)\times 2s+(1+6)\times 1t\} \\ \quad =-\dfrac{1}{6}(-6+14s+7t) \\ y=-\dfrac{1}{6}\{-12+(4-6-6)s+2t\} \\ \quad =-\dfrac{1}{6}(-12-8s+2t) \\ z=-\dfrac{1}{6}\{-6+2s+(1-6-6)t\} \\ \quad =-\dfrac{1}{6}(-6+2s-11t) \end{cases}$$

(例2) $-2x+y-3=0$

$2x-y+3=0,\quad k=2^2+(-1)^2=5$

$$\begin{cases} x=-\dfrac{1}{5}\{2\times 3+(2+5)\times(-1)s+0\} \\ \quad =-\dfrac{6}{5}+\dfrac{7}{5}s \\ y=-\dfrac{1}{5}\{(-1)\times 3+(1-5-10)s+0\} \\ \quad =\dfrac{3}{5}+\dfrac{14}{5}s \\ z=-\dfrac{1}{5}\{0+0+(0-5-10)t\}=3t \end{cases}$$

(注) III. において内積を計算すれば

$$\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}=bc\left(1-\frac{1}{k}\right)$$

となるので，平面の方程式をあらかじめ変形して $k=1$ となるようにしておくと $\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}$ にできる．

<参考文献>

涌井良幸・涌井貞美
「高校生のための代数・幾何パソコン学習法」
誠文堂新光社

(東京都立神代高等学校)