同じ１次分数関数を n重に合成した関数の性質

岡　多賀彦（おか　たかひこ）

１．はじめに

１次分数関数と２行２列の行列は，２つの１次分数関数の合成関数とそれらに対応する行列の積とでは対応する部分が一致するなど，密接に関係する．ここでは，対応する行列の n 乗の知識を生かして，同じ１次分数関数を n 重に合成した関数の性質について調べる．

２．行列の n 乗

成分が実数であり，逆行列が存在し，単位行列の実数倍でない２行２列の行列

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

があり，これが２つの固有値 α と β を持つとする．

E と O を２行２列の単位行列と零行列とするときケーリー・ハミルトンの定理

$$A^2-pA+qE=O$$

が成り立つ．ここで

$$p\equiv a+d=\alpha+\beta$$

$$q\equiv ad-bc=\alpha\beta$$

まず，自然数 n について，行列 A の n 乗 A^n を求める．

適当な実数 a_n，b_n を用いて

$$A^n=a_nA+b_nE \qquad \cdots\cdots ①$$

と表される．ここで

$$(a_1,\ b_1)=(1,\ 0)$$

$$(a_{n+1},\ b_{n+1})=(pa_n+b_n,\ -qa_n) \qquad \cdots\cdots ②$$

小さな n について，a_n を α と β を用いて表すと

$$a_2=\alpha+\beta$$

$$a_3=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$$

$$a_4=\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3$$

であるから，一般の n について

$$a_n=\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\cdots\cdots+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1} \qquad \cdots\cdots ③$$

と推定できる．これが正しいことは数学的帰納法により証明できる．

したがって，②③から，行列 A の n 乗は

$$A^n=(\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\cdots\cdots+\beta^{n-1})A$$
$$-\alpha\beta(\alpha^{n-2}+\alpha^{n-3}\beta+\cdots\cdots+\beta^{n-2})E \qquad \cdots ④$$

である．

ところで，④は $\alpha\neq\beta$ のとき

$$A^n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}A-\alpha\beta\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}E$$
$$=\alpha^n\frac{A-\beta E}{\alpha-\beta}+\beta^n\frac{A-\alpha E}{\beta-\alpha} \qquad \cdots\cdots ⑤$$

$\alpha=\beta$ のとき

$$A^n=n\alpha^{n-1}A-(n-1)\alpha^nE$$
$$=\alpha^nE+n\alpha^{n-1}(A-E) \qquad \cdots\cdots ⑥$$

に変形され，よく知られた公式に一致する．

３．何重かの合成でもとにもどる１次分数関数

零ベクトルでないベクトル $(x,\ y)$ を考え，その成分比を $z=\dfrac{x}{y}$ とする．ただし，$y=0$ のとき $z=\infty$ とする．[1)]

１次分数関数

$$z'\equiv f(z)=\frac{az+b}{cz+d} \qquad \cdots\cdots ⑦$$

と k を０でない任意の実数とする１次変換

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots ⑧$$

が対応する．ただし，$f(\infty)=\dfrac{a}{c}$ とする．

次に，同じ１次分数関数⑦を n 重に合成した関数

$$f^n(z)\equiv f(\cdots(f(f(z)))\cdots) \qquad \cdots\cdots ⑨$$

を考える．

⑨ が最小の n で変数 z に一致する

$$f^n(z)=z \qquad \cdots\cdots ⑩$$

とする．このとき，⑦⑧ の対応から

$$(kA)^n=E$$

である．さらに，① から

$$a_n=0$$

である．

小さな n について，a_n を p と q を用いて表すと

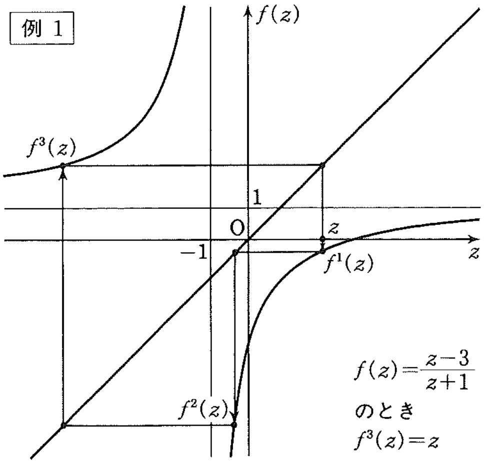
$$a_2=p$$
$$a_3=p^2-q$$
$$a_4=p(p^2-2q)$$
$$a_5=p^4-3p^2q+q^2$$
$$a_6=p(p^2-q)(p^2-3q)$$

などとなる．

したがって，いくつかの n について，最小の n で ⑩ となる条件は下表の通りである．[2)]

n	$a+d$ と $ad-bc$ の関係
2	$a+d=0$
3	$(a+d)^2=ad-bc$
4	$(a+d)^2=2(ad-bc)$
6	$(a+d)^2=3(ad-bc)$

例 1



4．n 重合成関数の極限値

n を無限大にしたとき ⑨ の形の合成関数が極限値を持つ 2 つの場合について調べる．

(1) 対応する行列 A が絶対値の異なる 2 つの実数固有値 α と β ($|\alpha|>|\beta|$) を持つとき，それらに属する固有ベクトルの 1 つは，

$$\begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \end{pmatrix}\equiv\frac{A-\beta E}{\alpha-\beta}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} x_\beta \\ y_\beta \end{pmatrix}\equiv\frac{A-\alpha E}{\beta-\alpha}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

である．

このとき，⑤ から，⑨ の形の合成関数は

$$f^n(z)=\frac{(k\alpha)^n x_\alpha+(k\beta)^n x_\beta}{(k\alpha)^n y_\alpha+(k\beta)^n y_\beta} \qquad \cdots\cdots ⑪$$

である．したがって，$z\neq\frac{x_\beta}{y_\beta}$ のとき，⑪ の極限値は

$$\lim_{n\to\infty}f^n(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_\alpha+(\beta/\alpha)^n x_\beta}{y_\alpha+(\beta/\alpha)^n y_\beta}$$
$$=\frac{x_\alpha}{y_\alpha} \qquad \cdots\cdots ⑫$$

である．対応する行列が絶対値の異なる 2 つの実数固有値を持つとき，固有値の絶対値が大きい方に属する固有ベクトルの成分比になる．[3)4)]

(2) 対応する行列 A が 0 でないただ 1 つの実数固有値を持つとき，それに属する固有ベクトルの 1 つは

$$\begin{pmatrix} x_\alpha' \\ y_\alpha' \end{pmatrix}\equiv k(A-\alpha E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

である．

このとき，⑥ から，⑨ の形の合成関数は

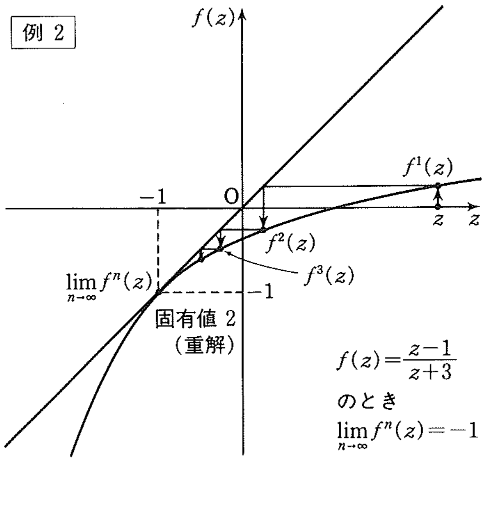
$$f^n(z)=\frac{(k\alpha)^n x+n(k\alpha)^{n-1}x_\alpha'}{(k\alpha)^n y+n(k\alpha)^{n-1}y_\alpha'} \qquad \cdots\cdots ⑬$$

である．したがって，⑬ の極限値は

$$\lim_{n\to\infty}f^n(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{(k\alpha/n)x+x_\alpha'}{(k\alpha/n)y+y_\alpha'}$$
$$=\frac{x_\alpha'}{y_\alpha'} \qquad \cdots\cdots ⑭$$

である．対応する行列がただ 1 つの実数固有値を持つとき，固有ベクトルの成分比になる．

例 2



5．連分数展開と第 n 次近似分数

次のように連分数展開できる平方数でない自然数 D がある．

$$\sqrt{D}=\underset{\boxed{1}}{\delta}+\cfrac{1}{\underset{\boxed{2}}{\varDelta}+\cfrac{1}{\underset{\boxed{3}}{2\delta}+\cfrac{1}{\underset{\boxed{4}}{\varDelta}+\cfrac{1}{\underset{\boxed{5}}{2\delta+\cdots}}}}} \qquad \cdots\cdots ⑮$$

ここで，$\delta=[\sqrt{D}]$，$\varDelta=\dfrac{2\delta}{D-\delta^2}$ は自然数である．

δ が 3 以下の D について下表に示す．[5]

D	δ	$\varDelta$	D	δ	$\varDelta$	D	δ	$\varDelta$
2	1	2	5	2	4	10	3	6
3	1	1	6	2	2	11	3	3
			8	2	1	12	3	2
						15	3	1

さて，連分数展開の途中で切断した近似分数を考える．例えば，第 3 次近似分数は

$$\frac{x_3}{y_3}=\underset{\boxed{1}}{\delta}+\cfrac{1}{\underset{\boxed{2}}{\varDelta}+\cfrac{1}{\underset{\boxed{3}}{2\delta}}}$$

である．

第 n 断目で切断した第 n 次近似分数を $\dfrac{x_n}{y_n}$ で表すと，その分子と分母はいくつかの行列の積を用いて，

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=\underset{\boxed{1}}{\begin{pmatrix} \delta & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}\underset{\boxed{2}}{\begin{pmatrix} \varDelta & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}\underset{\boxed{3}}{\begin{pmatrix} 2\delta & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}\times \qquad \cdots\cdots ⑯$$

$$\times\underset{\boxed{4}}{\begin{pmatrix} \varDelta & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}\underset{\boxed{5}}{\begin{pmatrix} 2\delta & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}\cdots\underset{\boxed{n+1}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

と表される．[6]

例えば，第 3 次近似分数の場合，

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}=\underset{\boxed{1}}{\begin{pmatrix} \delta & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}\underset{\boxed{2}}{\begin{pmatrix} \varDelta & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}\underset{\boxed{3}}{\begin{pmatrix} 2\delta & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}\underset{\boxed{4}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

である．

このとき，n によらず第 n 次と第（$n+2$）次近似分数の分子と分母の間に

$$\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ y_{n+2} \end{pmatrix}=\underset{\boxed{1}}{\begin{pmatrix} \delta & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}\underset{\boxed{2}}{\begin{pmatrix} \varDelta & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}\underset{\boxed{3}}{\begin{pmatrix} 2\delta & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} \delta & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \delta\varDelta+1 & \varDelta D \\ \varDelta & \delta\varDelta+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots ⑰$$

とくに，$D=\delta^2+1$ のときには，$\varDelta=2\delta$ となるので，第 n 次と第（$n+1$）次近似分数の分子と分母の間に

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \delta & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\delta & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \delta & D \\ 1 & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

の関係がある．

一方，a と c が正の実数ならば，行列

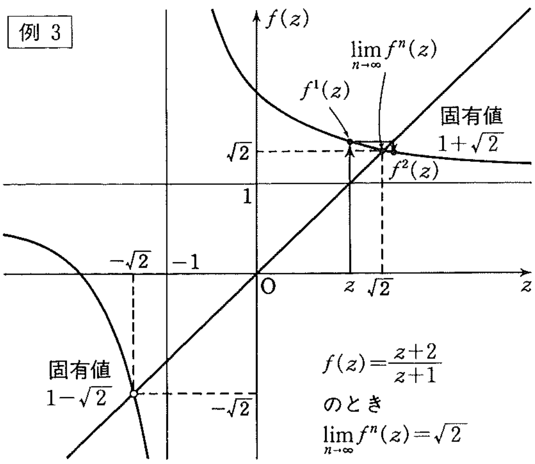
$$\begin{pmatrix} a & cD \\ c & a \end{pmatrix}$$

は絶対値の異なる 2 つの固有値 $a+c\sqrt{D}$，$a-c\sqrt{D}$ を持ち，それらに属する固有ベクトルは $(\sqrt{D},\ 1)$，$(\sqrt{D},\ -1)$ である．

したがって，⑫ から，第 n 次近似分数の極限値は

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\sqrt{D} \qquad \cdots\cdots ⑱$$

であり，連分数展開を試みた $\sqrt{D}$ と矛盾しない．



ちなみに，⑮ のように連分数展開できる D に限らず，D と a と c がどんな正の実数であっても，

$$f(z)=\frac{az+cD}{cz+a}$$

の形の 1 次分数関数について，⑨ の形の合成関数の極限値は

$$\lim_{n\to\infty}f^n(z)=\sqrt{D}$$

である．ただし，$z \neq -\sqrt{D}$ とする．

6．速度の相対論的合成則

空間と時間とがそれぞれ1次元である2次元「ミンコフスキー空間」を考え，その座標を (s, t) とする．

いま，この空間内の同一点が互いに等速運動している2つの座標系によって (s, t) と (s', t') の2通りに表されるとする．ただし，真空中の光速度を1，座標系 (s, t) は座標系 (s', t') に対して正の相対速度 B を持つとする．

「光速不変の原理」により，2つの座標系で「世界間隔」が等しい．

$$t^2-s^2=t'^2-s'^2$$

これから，2つの座標系は「ローレンツ変換」

$$\begin{pmatrix} s' \\ t' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots ⑲$$

で結ばれる．ただし，$a>0$，$a^2-b^2=1$

一方，s が0のときの $\dfrac{s'}{t'}$ が相対速度 B なので，

$$B=\left(\frac{s'}{t'}\right)_{s=0}=\frac{bt}{at}=\frac{b}{a} \quad \cdots\cdots ⑳$$

である．ここで，$0<B<1$

同一の物体の2つの座標系での速度を

$$\beta=\frac{ds}{dt}, \qquad \beta'=\frac{ds'}{dt'}$$

とすると，⑲から

$$\frac{ds'}{dt'}=\frac{a\cdot ds+b\cdot dt}{b\cdot ds+a\cdot dt}$$
$$=\frac{(ds/dt)+(b/a)}{(b/a)(ds/dt)+1}$$

となるので，⑳から，「速度の相対論的合成則」は

$$\beta'\equiv f(\beta)=\frac{\beta+B}{B\beta+1} \quad \cdots\cdots ㉑$$

である．[7)]

したがって，対応する行列の2つの固有値が

$$\frac{1+B}{\sqrt{1-B^2}}, \ \frac{1-B}{\sqrt{1-B^2}}$$

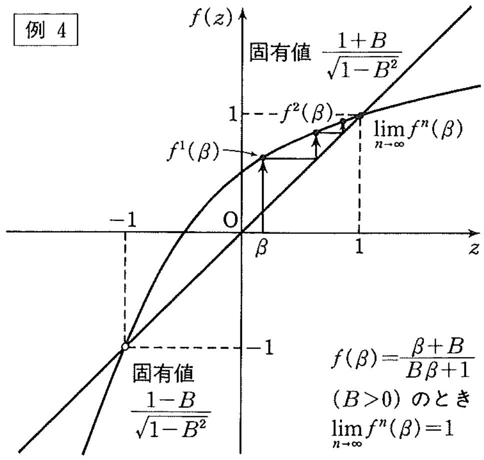
で，それらに属する固有ベクトルが $(1, 1)$, $(1, -1)$ になるので，⑫㉑から，⑨の形の合成関数の極限値は

$$\lim_{n\to\infty} f^n(\beta)=1$$

である．正の相対速度を無限に合成するとき，極限の速度は光速度である．

ちなみに，$|\beta|<1$ のとき $|\beta|<|f(\beta)|<1$ となるので，光速度未満の相対速度をどのように合成しても，決して光速度に達することやそれを越えることはない．

$\boxed{例\ 4}$



7．おわりに

平成元年度・東大入試では，変数 z が複素数のときの1次分数関数

$$f(z)=\frac{z+1-q}{z+1}$$

が，$f^5(z)=z$ となる条件が出題された．[8)]

変数 z が実数から複素数に変更されても，ここでの議論は修正されない．

平成6年度実施の新教育課程では，行列・一次変換が姿を消し，かわりに複素数・複素平面が復活する．

末尾ながら，大阪高等学校数学教育会の仲間の励ましに感謝する．

＜参考文献 と 注＞

1) z は，実数全体の集合 R に無限大の要素 $\{\infty\}$ を加えた集合 P の要素である．

2) 比較のために，いくつかの n について，最小の n で $A^n=E$ となる条件を表に示す．

n	$a+d$	$ad-bc$
2	0	−1
3	−1	1
4	0	1
6	1	1

3) 変数 z の値によっては $\dfrac{x_\beta}{y_\beta}$ にもなると錯覚しやすいが，$\dfrac{x_\beta}{y_\beta}$ となるのは $z=\dfrac{x_\beta}{y_\beta}$ のときに限られる．

4) 対応する行列の固有値αに属する固有ベクトルを$(x_\alpha,\ y_\alpha)$とすると

$$f\left(\frac{x_\alpha}{y_\alpha}\right)=\frac{a(x_\alpha/y_\alpha)+b}{c(x_\alpha/y_\alpha)+d}=\frac{ax_\alpha+by_\alpha}{cx_\alpha+dy_\alpha}$$

$$=\frac{(\alpha x_\alpha)}{(\alpha y_\alpha)}=\frac{x_\alpha}{y_\alpha}$$

となるので，固有ベクトルの成分比が1次分数関数の不動点であり，その特性方程式の解でもある．

5) Dが 7, 13, 14 などのとき$\varDelta$が分数になる．しかし，形式的な展開は⑮であり，⑱までの議論は変更されない．

6) 岩堀長慶：「二次行列の世界」(岩波書店，1983) $p.$ 210

7) 真空中の光速度c， 2つの座標系での速度vとv'，相対速度Vとすると，よく見かける

$$v'=\frac{v+V}{1+vV/c^2}$$

となる．

8) 井手昂：「$ad-bc$のすべて」，大学受験チャート受験数学テーマ8 (数研出版，1990) $p.$ 66

変数zが実数の同じ関数について，$f^4(z)=z$となる条件が説明されてある．

(兵庫県 灘高等学校)