1次変換と不動直線の分類

熊野　充博

『数研通信』11号に「数学科志望の生徒に対する指導について」と題する伊藤洋一氏の論稿が載せられている．氏が例示した問題（後述）は，本質的には1次変換の不動直線を求める問題である．不動直線の決定については参考文献〔1〕〔2〕等に解説があるが，まだ十分知られていない憾みがあるので，この小論で改めて紹介し，大学入試問題の「出題の根拠」（背景）にも言及したいと考える．

1　1次変換の基本性質

【定理1・1】　正則な1次変換 f によって，

（1）直線は直線に，線分は線分に移る．特に原点を通る直線は原点を通る直線に移る．

（2）同一直線上の2線分は，長さの比が変わらない2線分に移る．

（3）平行な直線は平行な直線に移る．

（4）三角形は三角形に，三角形の内部は三角形の内部に移る．

（5）1次変換 f の行列を A とするとき，三角形の面積は $|\det A|$ 倍される．

（6）$\det A>0$ ならば三角形は同じ向きに，$\det A<0$ ならば逆向き（裏返し）に移る．

<解説>　証明は略す．以上の基本性質を生徒に教えるのに，例の〝猫うつし〟は最適の教材であろう．ここで（5）（6）について少し触れておきたい．

1次変換 f の行列を $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする．ここで，$\det A=ad-bc$ である．

f によって，$(1,\ 0)\to(a,\ c)$，$(0,\ 1)\to(b,\ d)$ に移る．次の図の1辺の長さが1の正方形が，$\vec{a}=(a,\ c)$，$\vec{b}=(b,\ d)$ を2辺とする平行四辺形に移される．この平行四辺形の面積が，$|\det A|=|ad-bc|$ である．

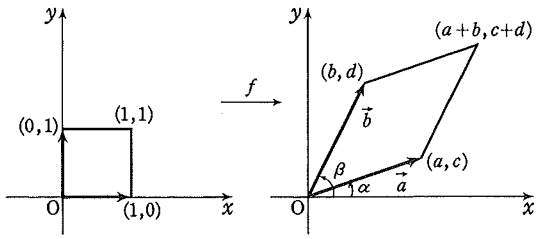
$\vec{a}$，$\vec{b}$ と x 軸の正の向きがなす角をそれぞれ α，β とすると，

$$|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\beta-\alpha)=ad-bc$$

が成り立つから，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ がつくる平行四辺形において，次のことがわかる（a，b，c，d は正）．

$$ad-bc>0 \iff \vec{b}\ \text{は}\ \vec{a}\ \text{の左側にある}$$

$$ad-bc<0 \iff \vec{b}\ \text{は}\ \vec{a}\ \text{の右側にある}$$



なお，1次変換 f が正則でない場合については説明を省略する．

2　1次変換と固有値・固有ベクトル

不動直線に関する問題は，とどのつまり，1次変換の固有値・固有ベクトルの問題に帰着する．次に今後の議論で必要な事項をまとめておく．

〔定義1〕　平面上の1次変換 f に対して，複素数 λ およびベクトル $\vec{p}\neq\vec{0}$ が存在して，$f(\vec{p})=\lambda\vec{p}$ と書けるとき，λ を f の固有値，$\vec{p}$ をその固有ベクトルと呼ぶ．更に，λ が実数のとき，λ を実固有値という．

〔定義2〕　1次変換 f の行列を $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とするとき，2次方程式 $\det(A-xE)=0$，すなわち，

$$x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0$$

を f の固有方程式という（E は単位行列を表す）．

【定理2・1】　1次変換 f の実固有値 λ は，固有方程式の実数解である．

証明　λ が f の実固有値であれば，ベクトル $\vec{p}\neq\vec{0}$ が存在して，$A\vec{p}=\lambda\vec{p}$ と書ける．

$$\therefore\ (A-\lambda E)\vec{p}=\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}\vec{p}=\vec{0}$$

ここで，$\vec{p}\neq\vec{0}$ であるから，$A-\lambda E$ は逆行列をもたない．したがって，$\det(A-\lambda E)=0$ であるから，

$$\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0$$

ゆえに，λ は固有方程式の実数解である．■

〔定義３〕　１次変換 f の実固有値 λ の固有ベクトルに平行で原点を通る直線を，固有値 λ に対する固有直線と呼び，l_λ で表す．

【定理２・２】　１次変換 f の実固有値を λ とする．固有直線 l_λ の方程式は，$A\neq\lambda E$ のとき，

$$(a-\lambda)x+by=0 \ \cdots\cdots\ ①$$

（または，$cx+(d-\lambda)y=0$ ……②）　である．

証明　l_λ 上の任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とおくと，$A\vec{p}=\lambda\vec{p}$ から，

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これから①（または②）が出る．①で $x,\ y$ の係数が共に 0 のときは②を l_λ とすればよい．■

（なお，$A=\lambda E$ のときは，原点を通るすべての直線が固有値 λ に対する固有直線である）

【定理２・３】　１次変換 f の異なる固有値 $\lambda,\ \mu$ に対する固有ベクトルを，それぞれ $\vec{p},\ \vec{q}$ とすれば，$\vec{p}\nparallel\vec{q}$（すなわち $\vec{p}$ と $\vec{q}$ は１次独立）である．

証明　$\vec{q}=k\vec{p}$ と仮定する．$A\vec{q}=Ak\vec{p}=kA\vec{p}$．
$\therefore\ \mu\vec{q}=k\lambda\vec{p}$．　これに $\vec{q}=k\vec{p}$ を代入すれば，
$k\mu\vec{p}=k\lambda\vec{p}$．　$\therefore\ k(\lambda-\mu)\vec{p}=\vec{0}$．ここで，
$\lambda-\mu\neq 0$ かつ $\vec{p}\neq\vec{0}$ から，$k=0$．これより $\vec{q}=\vec{0}$ となり，$\vec{q}\neq\vec{0}$ に反する．よって，$\vec{p}\nparallel\vec{q}$　■

【定理２・４】　１次変換 f の１つの固有値 λ に対する固有ベクトルを $\vec{p},\ \vec{q}$ とする．$\vec{p}\nparallel\vec{q}$ ならば，f の行列 A は，$A=\lambda E$ と書ける．

証明　$A\vec{p}=\lambda\vec{p}$，$A\vec{q}=\lambda\vec{q}$ から $A(\vec{p}\ \ \vec{q})=\lambda(\vec{p}\ \ \vec{q})$．ここで，$\vec{p}\nparallel\vec{q}\iff\det(\vec{p}\ \ \vec{q})\neq 0$ より，$(\vec{p}\ \ \vec{q})$ の逆行列が存在するから，
$\therefore\ A=\lambda(\vec{p}\ \ \vec{q})\cdot(\vec{p}\ \ \vec{q})^{-1}=\lambda E$．■

以上の固有値・固有ベクトルの性質をふまえると，１次変換のしくみが明らかとなる．

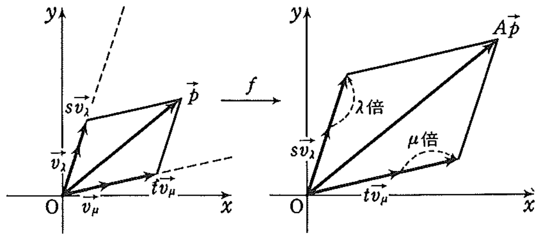
１次変換 f の異なる２つの実固有値を $\lambda,\ \mu$ とし，その固有ベクトルを $\overrightarrow{v_\lambda},\ \overrightarrow{v_\mu}$ とする．定理２・３により $\overrightarrow{v_\lambda}$ と $\overrightarrow{v_\mu}$ は１次独立であるから，平面上の任意のベクトルを $\vec{p}$ とすると，

$$\vec{p}=s\overrightarrow{v_\lambda}+t\overrightarrow{v_\mu}\ (s,\ t\ は実数)$$

と表される．したがって，

$$A\vec{p}=A(s\overrightarrow{v_\lambda}+t\overrightarrow{v_\mu})=As\overrightarrow{v_\lambda}+At\overrightarrow{v_\mu}$$
$$=\lambda(s\overrightarrow{v_\lambda})+\mu(t\overrightarrow{v_\mu})$$

すなわち，１次変換 f は，単純化していえば，$\overrightarrow{v_\lambda}$ 方向に λ 倍し，$\overrightarrow{v_\mu}$ 方向に μ 倍する変換である．



３　１次変換と不動直線の分類

〔定義４〕　１次変換 f に対して，$f(\overrightarrow{\mathrm{OP}})=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が成り立つとき，点Pは f の不動点という．

（原点Oはつねに不動点である）

【定理３・１】　１次変換 f が原点以外の不動点をもつ $\iff$ f は１を実固有値にもつ

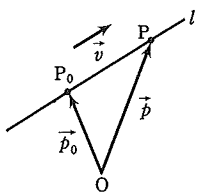
証明　点Pが原点O以外の不動点 $\iff f(\overrightarrow{\mathrm{OP}})=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\ (\overrightarrow{\mathrm{OP}}\neq\vec{0})\iff\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は f の固有値１に対する固有ベクトル $\iff f$ は１を実固有値にもつ．■

【定理３・２】　Oを原点とし，３点O，P，Qは同一直線上にないとする．２点P，Qが１次変換 f の不動点ならば，f は恒等変換である．

証明　定理３・１により，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は f の固有値１に対する固有ベクトルである．したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\nparallel\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ であるから，定理２・４により，f の行列 $A=E$．すなわち，f は恒等変換である．■

次に不動直線について考える．不動直線とは，簡単にいえば，１次変換によって自分自身に移される直線のことであるが，次のように定式化される．

〔定義５〕　直線 $l:\ \vec{p}=\overrightarrow{p_0}+t\vec{v}$（$t$ は実数）が，１次変換 f の不動直線とは，f の行列を A とするとき，



① $A\vec{v}\parallel\vec{v}$（方向ベクトルが変わらない）

② $A\vec{v}\neq\vec{0}$（直線が１点に移らない）

③ $A\overrightarrow{p_0}=\overrightarrow{p_0}+s\vec{v}$（直線上の１点を同じ直線上に移す）

を満たす直線のことである．

【定理３・３】 直線 l：$\vec{p}=\overrightarrow{p_0}+t\vec{v}$ が１次変換 f の不動直線ならば，方向ベクトル $\vec{v}$ は，f の（０でない実固有値に対する）固有ベクトルである．

証明 $A\vec{v}\,/\!/\,\vec{v} \Longleftrightarrow A\vec{v}=\lambda\vec{v}$（$\lambda$ はある実数）．
$A\vec{v}\neq\vec{0}$ から $\lambda\neq0$ かつ $\vec{v}\neq\vec{0}$．すなわち，$\vec{v}$ は f の実固有値 $\lambda\neq0$ に対する固有ベクトルである．■

上記の定理から，不動直線は１次変換 f の固有ベクトルに平行である．このことと，2 でみたように，１次変換はその固有ベクトルの方向への実数倍に分解できることとを用いれば，不動直線の分類が容易に出来る．

【定理３・４】 １次変換 f の０でない実固有値に対する固有直線は不動直線である．

証明 f の実固有値 $\lambda\neq0$ に対する固有ベクトルを $\overrightarrow{v_\lambda}$ とする．f は $\overrightarrow{v_\lambda}$ の方向に λ 倍する変換であるから，原点を通り $\overrightarrow{v_\lambda}$ に平行な固有直線 l_λ を動かさない．すなわち，l_λ は f の不動直線である．■
（固有値 $\lambda=0$ のときは，l_λ 上の任意の点を原点に移す）

【定理３・５】（不動直線の分類）

１次変換 f の行列を $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とし，f の実固有値 λ，μ に対する固有直線をそれぞれ l_λ，l_μ とする．表中の k は任意の実数である．

（ｉ） $\lambda\neq\mu$ のとき（λ，μ を入れかえても同じ）

固　有　値		不　動　直　線	
$\lambda\neq0$	$\mu=0$	l_λ：$(a-\lambda)x+by=0$	①
	$\mu=1$	$(a-\lambda)x+by=k$	②
		l_1：$(a-1)x+by=0$	③
$\lambda\neq0$ $\lambda\neq1$	$\mu\neq0$ $\mu\neq1$	l_λ：$(a-\lambda)x+by=0$	④
		l_μ：$(a-\mu)x+by=0$	⑤

（ii） $\lambda=\mu\neq0$ のとき

固　有　値	不　動　直　線	
$\lambda=\mu=1$	〔１〕 $A=E$ のとき，平面上のすべての直線	⑥
	〔２〕 $A\neq E$ のとき，$(a-1)x+by=k$	⑦
$\lambda=\mu\neq1$	〔１〕 $A=\lambda E$ のとき，原点を通るすべての直線	⑧
	〔２〕 $A\neq\lambda E$ のとき，l_λ：$(a-\lambda)x+by=0$	⑨

〔注意〕 (ア) 不動直線の方程式①において，左辺の x，y の係数が共に０のときは，定理２・２にもとづいて，$cx+(d-\lambda)y=0$ をあてるものとする．②③④⑤⑦⑨ の各方程式も同様に考える．
(イ) 固有値 λ，μ が共に虚数のとき，不動直線は存在しない（$\lambda=\mu=0$ のときは後述する）．

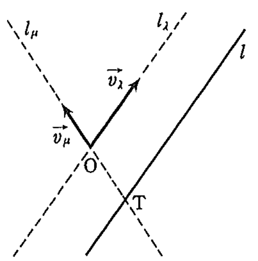
証明 f の実固有値 λ，μ に対する固有ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{v_\lambda}$，$\overrightarrow{v_\mu}$ とする．

定理３・３および定理３・４により，原点を通る不動直線は，０でない実固有値に対する固有直線だけである．これで，①③④⑤⑨ および $k=0$ のときの ②⑦ は不動直線であることがわかる．

次に原点を通らない不動直線 l を求めよう．

いま，$l\,/\!/\,\overrightarrow{v_\lambda}$（$\lambda\neq0$）と仮定する（$l\,/\!/\,\overrightarrow{v_\mu}$ の場合も同様）．

（ｉ） $\lambda\neq\mu$ の場合．定理２・３により，$\overrightarrow{v_\lambda}\,/\!\!\!/\!\!\!\!\times\,\overrightarrow{v_\mu}$



不動直線 l と固有直線 l_μ との交点をＴとする．２直線 l，l_μ はともに不動直線であるから，点Ｔは f の不動点である．よって，定理３・１により，$\mu=1$．

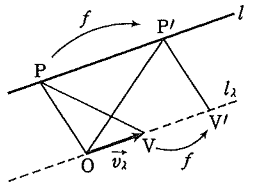
逆に，$\mu=1$ とすると，固有直線 l_λ に平行な任意の直線 l は不動直線である（$\because$ f は $\overrightarrow{v_1}$ 方向は動かさず，$\overrightarrow{v_\lambda}$ 方向に λ 倍する変換であるから）．

したがって，不動直線 l の方程式は，$l\,/\!/\,l_\lambda$ から，

$$(a-\lambda)x+by=k \quad （k は任意の実数）$$

となる．これで ②（$k\neq0$）が示された．

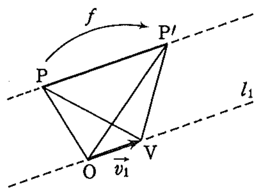
（ii） $\lambda=\mu\neq0$ の場合.
不動直線 l 上の任意の点をPとし，Pの像を P′ とし，$\overrightarrow{v_\lambda}=\overrightarrow{\mathrm{OV}}$，$f(\overrightarrow{v_\lambda})=\lambda\overrightarrow{v_\lambda}=\overrightarrow{\mathrm{OV'}}$ とおく.



固有値 λ は，f の固有方程式：
$$x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0$$
の重解であるから，解と係数の関係により，
$\det A=ad-bc=\lambda^2>0$　（∵ $\lambda\neq0$）

したがって，定理1・1の（6）の性質により，三角形 OVP とその像である三角形 OV′P′ とは同じ向きでなくてはならないから，$\lambda>0$ かつ $\mathrm{OV'}=\lambda\mathrm{OV}$ と書ける．定理1・1の（5）により，
$$\triangle\mathrm{OV'P'}=|\det A|\cdot\triangle\mathrm{OVP}=\lambda^2\cdot\triangle\mathrm{OVP}$$
一方，この2つの三角形において，高さは共通で底辺の比が 1：λ より，$\triangle\mathrm{OV'P'}=\lambda\cdot\triangle\mathrm{OVP}$.
ゆえに $\lambda^2\cdot\triangle\mathrm{OVP}=\lambda\cdot\triangle\mathrm{OVP}$ から，$\lambda=1$.

逆に，$\lambda=\mu=1$ のときを考える．固有直線 l_1 上にない平面上の任意の点をPとし，Pの像を P′ とする．$\overrightarrow{\mathrm{OV}}=\overrightarrow{v_1}$ となる点Vをとる．



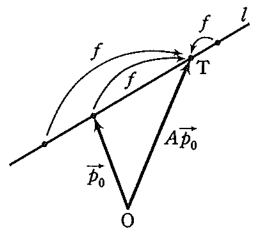
いま，P=P′ ならば，2点P，V が f の不動点となるから，定理3・2より，f は恒等変換（すなわち $A=E$）である．このとき，明らかに平面上のすべての直線が不動直線である．
また，P≠P′ ならば，$\det A=ad-bc=1^2>0$ であるから，三角形 OVP とその像である三角形 OVP′ とは同じ向きで面積が等しい．

よって，底辺 OV に対する高さが等しいので，PP′∥OV．すなわち，固有直線 l_1 に平行な任意の直線をそれ自身に移す．

不動直線 l の方程式は，$l\parallel l_1$ から
$$(a-1)x+by=k\quad（k は任意の実数）$$
となる．これで ⑥⑦（$k\neq0$）が示された．

なお，$\lambda=\mu\neq1$ のとき，原点を通らない不動直線は存在しない．固有値 λ（$\neq0,\ 1$）に対する固有ベクトルを $\overrightarrow{u_\lambda}$，$\overrightarrow{v_\lambda}$ とする．$\overrightarrow{u_\lambda}\not\parallel\overrightarrow{v_\lambda}$ ならば，定理2・4により，$A=\lambda E$ と書ける．このとき，明らかに原点を通るすべての直線が不動直線である．$A\neq\lambda E$ ならば，固有直線 l_λ：
$$(a-\lambda)x+by=0$$
が不動直線である．これで ⑧⑨ が示された．■

ここで，不動直線の定義を少し「拡張」しよう．
〔定義6〕（広義の不動直線）
直線 l：$\vec{p}=\overrightarrow{p_0}+t\vec{v}$（$t$ は実数）が1次変換 f の「広義の不動直線」とは，



① $A\vec{v}=\vec{0}$（直線が1点に移る）
② $A\overrightarrow{p_0}=\overrightarrow{p_0}+s\vec{v}$（直線上の1点を同じ直線上に移す）
を満たす直線をいう．

したがって，「広義の不動直線 l」とは，1次変換 f が l 上の任意の点を l 上の定点に移すような直線のことである．

従来の不動直線を「狭義の不動直線」と呼び，狭義および広義の不動直線を総称して単に「不動直線」と呼ぶことにする．

【定理3・6】（広義の不動直線の分類）

1次変換 f の行列を $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ とし，f の実固有値 λ，μ に対する固有直線をそれぞれ l_λ，l_μ とする．表中の k は任意の実数である．

固有値		広義の不動直線	
$\lambda=0$	$\mu=1$	$ax+by=k$	⑩
	$\mu\neq0,\ 1$	l_0：$ax+by=0$	⑪
$\lambda=\mu=0$		〔1〕 $A=O$ のとき，原点を通るすべての直線	⑫
		〔2〕 $A\neq O$ のとき，l_0：$ax+by=0$	⑬

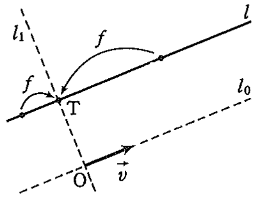
〔注意〕（ア）上記で λ と μ を入れかえても成り立つ．
（イ）⑩⑪⑬ の各方程式で x，y の係数が共に0のときは，左辺を $cx+dy=\cdots$ でおきかえる．

証明 広義の不動直線 l 上の任意の点は l 上の1点Tに移る．Tはそれ自身に移るから f の不動点である．また，l の方向ベクトル $\vec{v}$ は固有値0に対する固有ベクトルである（∵ $A\vec{v}=\vec{0}=0\cdot\vec{v}$）
他の固有値を μ とする．

（i） $\lambda=0,\ \mu\neq0$ の場合.

原点を通る広義の不動直線 l は，固有直線 l_0 に一致する（∵ 固有直線 $l_0 /\!/ \vec{v}$）．逆に固有直線 l_0 上のすべての点が原点に移ることは明らかである．

l が原点を通らないとき，Tは原点以外の f の不動点であるから，定理3・1により f は1を固有値にもつ．∴ $\mu=1$．逆に $\lambda=0,\ \mu=1$ のとき，固有直線 l_0 に平行な任意の直線 l 上のすべての点は，l と l_1 の交点Tに移る．



固有直線 l_0 の方程式は $ax+by=0$ であるから，l の方程式は，$ax+by=k$（k は任意）と書ける．したがって，$\lambda=0,\ \mu\neq0,\ 1$ のとき，広義の不動直線は l_0 のみである．これで ⑩⑪ が示された．

（ii） $\lambda=\mu=0$ の場合.

（i）により，原点を通らない広義の不動直線は存在しない．固有値0に対する他の固有ベクトルを $\vec{u}$ とする．

$\vec{u} \not/\!/ \vec{v}$ ならば定理2・4により $A=O$（零行列）となるから，原点を通るすべての直線が広義の不動直線である．$\vec{u} /\!/ \vec{v}$ ならば l は l_0 に一致する．これで ⑫⑬ が示された．■

定理3・5と定理3・6から，次の定理をうる．

【定理3・7】（原点を通らない「不動直線」）

1次変換 f が原点を通らない「不動直線」をもつ
$\iff$ f が原点以外の不動点をもつ

証明 f が原点を通らない「不動直線」をもつ
$\iff$ f が1を固有値にもつ
$\iff$ f が原点以外の不動点をもつ．■

【定理3・8】 1次変換 f が，原点を通らず平行でない2つの（狭義の）不動直線をもつならば，f は恒等変換である．

証明 定理3・5の分類表から明らか．■

4 入試問題への応用

最初に伊藤氏の例示した問題をとりあげる．

例題 1. 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で表される平面上の1次変換を f，直線 $y=mx$ $(m\neq0)$ を l とし，f は2つの条件：

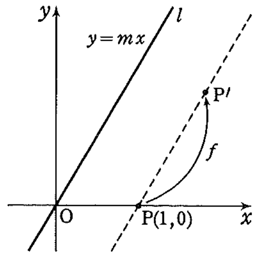
(ｱ) f は l の各点を動かさない

(ｲ) f は点 $\mathrm{P}(1,\ 0)$ を，Pを通り l に平行な直線上に移す

を満たすとする．このとき

(1) $ad-bc$ を求めよ．

(2) f により平面上の任意の点Qは，Qを通り l に平行な直線上の点に移ることを示せ．

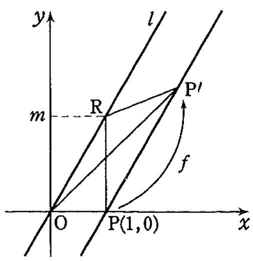


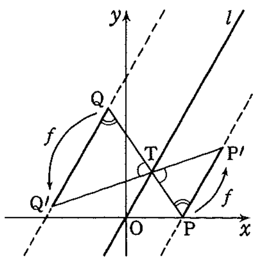
［解］ 1次変換 f は原点以外の不動点をもつから，1を実固有値にもつ．題意から，直線 PP′ は原点を通らない（狭義の）不動直線である．固有値1の固有直線 $l /\!/ \mathrm{PP'}$ であるから，定理3・5の分類表から（f の行列）$\neq E$ かつ $\lambda=\mu=1$．

ゆえに固有方程式から，$ad-bc=\lambda\mu=1$．

また，l に平行なすべての直線が f の不動直線であるから，f により平面上の任意の点Qは，Qを通り l に平行な直線上の点に移る．■

次に筆者が考えた「別解」を紹介する．





［別解］ l 上の点 $(1,\ m)$ をRとする．Pの像を P′ とすると，Rは f の不動点であるから，条件(ｲ)により，三角形 OPR とその像である三角形 OP′R は同じ向きでかつ面積が等しい（∵ $\mathrm{PP'} /\!/ \mathrm{OR}$）．

したがって，定理1・1の（5）（6）により，

$ad-bc=1$．

平面上の任意の点をQとする．Qが直線 l 上および直線 PP′ 上にない場合を考えれば十分である．

直線 PQ と l との交点をTとすると，Tは不動点である．Qの像を Q′ とする．定理1・1の（2）により，$\mathrm{PT}:\mathrm{TQ}=\mathrm{P'T}:\mathrm{TQ'}$ が成り立つ．これと，$\angle\mathrm{PTP'}=\angle\mathrm{QTQ'}$ より，$\triangle\mathrm{PTP'}\backsim\triangle\mathrm{QTQ'}$．よって，$\angle\mathrm{TPP'}=\angle\mathrm{TQQ'}$ であるから，$\mathrm{QQ'} /\!/ \mathrm{PP'}$．すなわち，$\mathrm{QQ'} /\!/ l$ をうる．■

例題 2. 1次変換fの行列を $A=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ とする．1次変換fによって直線上の点がすべて同じ直線上に移されるような直線があれば，そのすべてを求めよ． （改 帯広畜産大）

［解］ 行列Aの固有方程式は，$x^2-3x+2=0$．
よって，固有値は $\lambda=2$，$\mu=1$．

定理3・5により，不動直線の方程式は，

$$(4-2)x-3y=k,\ (4-1)x-3y=0$$

$\therefore\ 2x-3y=k$（kは任意），$x-y=0$． ■

例題 3. 1次変換 $A=\begin{pmatrix}k & 1\\ 1 & k\end{pmatrix}$ によって自分自身に移される直線を求めたい．kの値に応じてその直線の方程式を求めよ． （信州大）

［解］ 行列Aの固有方程式 $x^2-2kx+k^2-1=0$ を解くと，固有値は $\lambda=k-1$，$\mu=k+1$．
明らかに $\lambda\neq\mu$．固有直線の方程式は，

$$l_\lambda:(k-\lambda)x+y=0 \text{ から } x+y=0$$
$$l_\mu:(k-\mu)x+y=0 \text{ から } -x+y=0$$

定理3・5により（狭義の）不動直線の方程式は，
① $\lambda\neq0$，$\mu=0$ すなわち $k=-1$ のとき，$x+y=0$
② $\lambda=0$，$\mu\neq0$ すなわち $k=1$ のとき，$-x+y=0$
③ $\lambda\neq0$，$\mu=1$ すなわち $k=0$ のとき，
　$x+y=c$（cは任意），$-x+y=0$
④ $\lambda=1$，$\mu\neq0$ すなわち $k=2$ のとき，
　$x+y=0$，$-x+y=c$（cは任意）．
⑤ 上記以外のkのとき $x+y=0$，$-x+y=0$ ■

例題 4. 行列 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ によって定まるxy平面の1次変換をfとする．原点以外のある点PがfによってP自身に移されるならば，原点を通らない直線lであって，lのどの点もfによってlの点に移されるようなものが存在することを証明せよ．
（東京大）

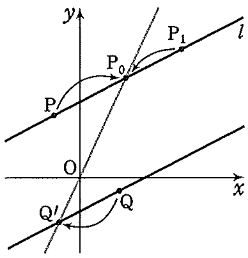
［解］ 上記の問題の逆も成り立つことは定理3・7で証明済みである． ■

この問題は出題時に「入試 Best 10 に入る難問」と騒がれたが（参考文献〔4〕），この問題の本質は，固有値・固有ベクトルの考え方を用いてこそ明らかになるといえる．

例題 5. 平行でない2直線 $l_1: p_1x+q_1y+1=0$，$l_2: p_2x+q_2y+1=0$ と，1次変換fが与えられている．fがl_1をl_2に移しl_2をl_1に移す変換であるとき，$f\circ f$ は恒等変換であることを示せ． （大阪大）

［解］ $f\circ f$ は，原点を通らず平行でない2直線 l_1，l_2 を不動直線にもつから，定理3・8により恒等変換である． ■

例題 6. 平面上でfを1次変換，lを原点Oを通らない直線とする．fがl上の異なる2点 $\mathrm{P_0}$，$\mathrm{P_1}$ に対して $f(\mathrm{P_0})=\mathrm{P_0}$，$f(\mathrm{P_1})=\mathrm{P_0}$ であるとき，次のことを証明せよ．



(1) 直線 $\mathrm{P_0P_1}$ 上の任意の点Pに対して，$f(\mathrm{P})=\mathrm{P_0}$ である．
(2) l上にも直線 $\mathrm{OP_0}$ 上にもない任意の点Qに対して $\mathrm{Q'}=f(\mathrm{Q})$ とする．点 Q′ は直線 $\mathrm{OP_0}$ 上にあり，直線 QQ′ はlに平行である． （広島大）

［解］ $f(\overrightarrow{\mathrm{OP_0}})=\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}$，$f(\overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}})=\overrightarrow{\mathrm{P_0P_0}}=\vec{0}$．
すなわち，1次変換fの固有値は1と0である．

定理3・6により，直線lは（広義の）不動直線であるから，直線 $\mathrm{P_0P_1}$（$=l$）上のすべての点Pに対して，$f(\mathrm{P})=\mathrm{P_0}$ また，l上にも直線 $\mathrm{OP_0}$ 上にもない任意の点Qは，Qを通ってlに平行な直線と直線 $\mathrm{OP_0}$ の交点（すなわち Q′）に移る． ■

〔参考文献〕

〔1〕 数研出版『チャート受験数学・テーマ5』
〔2〕 河野芳文氏（広島大学附属中・高校）の論稿「1次変換の不動点・不動直線の分類について」（広島県高数教『会誌』第21号・1986年）
〔3〕 麦の芽出版『あなたの数学　代数・幾何』
〔4〕 東京出版『大学への数学』1984年10月臨増号
〔5〕 研数書院『解法のクルー　代数・幾何』
（〔1〕〔2〕〔3〕には，不動直線の分類の解説がある．〔5〕では，不動直線を求めるのに $A\vec{v}\parallel\vec{v}$ を用いる工夫がなされている）

（広島県立神辺旭高等学校）