席替えの問題

中村　公一

40人のクラスで，くじ引きによってランダムに席替えをした場合，前と同じ席に決まってしまう生徒が生じることがあります．ホームルームを担当した方にとっては，少なからず経験されたことでしょう．

確率のことを少し学習した生徒には，「前と同じ席に決まる確率は $\frac{1}{40}$ だが，40人も生徒がいるのだから，その40倍の確率になるのは当然だ」といってごまかしてしまったことがあります．

しかし，その論理が，間違っていることは明らかです．正確には，

「40人で席替えをした場合，少なくとも1人が，前と同じ席になる確率を求めよ」

という問題になります．この種の問題は，背反事象の「全員が前と違った席になる確率」を求めて，1から引けばよいのですが，これが，なかなか難しい問題なのです．真っ先に思い浮かぶ計算は

$1-\left(\frac{39}{40}\right)^{40}$ ですが，1人1人が違った席になる場合というのは，それぞれ独立事象ではないわけですから（例えば2番目にくじを引く生徒にとっては，前と違った席になる確率は $\frac{38}{39}$ にも $\frac{39}{39}$ にもなる）この計算は，正確でないような気がします．

以前，生徒を説得するために，この問題を検討してみた結果，意外と高校程度の数学で解けることを発見しました．既に，専門分野では解かれている問題だとは思いますが，非常に面白いので，ここに紹介します．

さて，問題を一般的にして

「n 人のクラスで席替えをした場合，少なくとも1人が同じ席になる確率を求めよ」

という問題を解いてみましょう．

まず，背反の「n 人全員が，前と違った席になる場合」について考えます．帰納法で考えるとやりやすくなります．1人のクラスの場合は，いくら席替えしても前と同じ席になるのは当然ですから，0通りです．また，2人のクラスでは，1通りです．

さて，次に n 人のクラスの席替えで，全員が前と違った席になる場合が，a_n 通りであるとしましょう（ただし，$n>2$ とします）．このクラスの生徒数を1人増やして $(n+1)$ 人にします．この $(n+1)$ 人の集団で席替えをした場合，特定の人物，M君とL君に注目して考えます．M君が，前にL君が座っていた席になった場合，次の2通りの場合が考えられます．

1）L君が，前にM君が座っていた席になる場合（つまり，MとL2人が入れ替わる場合）
　残り $n-1$ 人が，前と違った席になる場合は a_{n-1} 通りです．

2）L君が，前にM君が座っていた席にならない場合（つまり，MとLの入れ替わりとならない場合）
　この場合，以前M君が座っていた席をL君が座っていたというように考えて，L君も含めた n 人が前と違った席に決まる，というように考えると，この場合の数が求まります．つまり，a_n 通りです．

この1）の場合も，2）の場合も，M君を中心に見ると，相手のL君というのは n 通りの選び方があるわけですから，結局，次の漸化式が得られます．

$$a_{n+1}=n(a_n+a_{n-1})$$
$$a_2=1,\quad a_1=0$$

さて，これから一般項 a_n を求めればよいのですが難しいので，直接この漸化式から「n 人全員が前と違った席になる確率 Q_n」を求めてみます．

$n>2$ のとき，$a_n=(n-1)(a_{n-1}+a_{n-2})$

と，書き替えておきます．n 人が席替えをした場合すべての可能性は $n!$ 通りあります．したがって

$Q_2=\frac{1}{2}$，$Q_1=0$

$n>2$ のときは

$$Q_n=\frac{a_n}{n!}=\frac{(n-1)(a_{n-1}+a_{n-2})}{n!}$$

$$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}+\frac{1}{n}\cdot\frac{a_{n-2}}{(n-2)!}$$

$$=\frac{n-1}{n}Q_{n-1}+\frac{1}{n}Q_{n-2}$$

この確率 Q_n の階差を求めていきます．

$$Q_n-Q_{n-1}=-\frac{1}{n}(Q_{n-1}-Q_{n-2})$$

$$Q_{n-1}-Q_{n-2}=-\frac{1}{n-1}(Q_{n-2}-Q_{n-3})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$Q_4-Q_3=-\frac{1}{4}(Q_3-Q_2)$$

$$Q_3-Q_2=-\frac{1}{3}(Q_2-Q_1)$$

これらすべての両辺をすべて掛け合わせ，約することにより（$Q_2-Q_1\neq 0$ から，$Q_n-Q_{n-1}\neq 0$ に注意）次の式を得ることができます．

$$Q_n-Q_{n-1}=(-1)^{n-2}\frac{Q_2-Q_1}{3\cdot 4\cdots\cdots(n-1)n}$$

ここで，$Q_2-Q_1=\frac{1}{2}$ ですから

$$Q_n-Q_{n-1}=(-1)^n\frac{1}{n!}$$

この式は，$n>1$ について成り立つ階差式です．

よって　$Q_n=Q_1+\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}$

もちろん，$Q_1=0$ であり，しかも

$(-1)^0\frac{1}{0!}+(-1)^1\frac{1}{1!}=0$ であることを考慮しますと，一般に $n\geqq 1$ において $Q_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}$ となります．したがって，求める「n 人のうち少なくとも1人が，前と同じ席になる確率」は，次の式にまとめられます．この確率を P_n として

$$\boxed{P_n=1-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}}\ \cdots\cdots ①$$

① 式を使って，40 人のクラスの場合を実際に計算してみました．

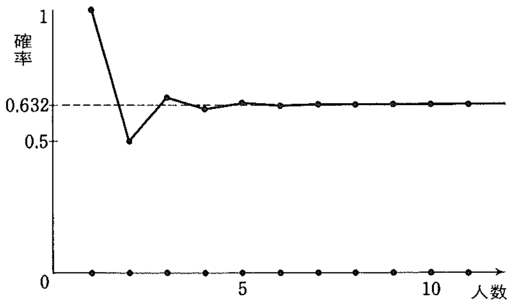
$$P_{40}=1-\left(1-\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots 40}\right)\fallingdotseq 0.632$$

答 約 63.2 %

やはり，かなり高い確率で，席替え前と同じ座席に決まる生徒が生じることがわかりました．だいたい 3 回の席替えのうち 2 回くらいの割合です．

なお，クラスの人数を 40 人ということで計算しましたが，もちろん ① 式で n の値をいろいろ変えていくと，45 人とか 50 人学級の場合の確率 P_{45} とか P_{50} とかも求められます．しかし，計算してみますと $n=6$ のころより 0.632 のまま，ほとんど変化がないことがわかります．（下図）

〔席替えして少なくとも 1 人が前と同じ席になる確率全体の人数を変えて計算した結果〕



どうも，この確率は 0.632 に，極めて早く収束するようです．実際，高等数学の専門書からマクローリンの公式を見つけてきました．

$$e^{-x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k!}$$

$x=1$ として　$e^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}P_n=1-e^{-1}=0.63212\cdots\cdots$$

やはり，極限値でした．

ところで，当初理論に欠陥があるため放棄した計算式 $1-\left(\frac{39}{40}\right)^{40}$ ですが，これの計算結果は 0.637

くらいになります．もちろんこれは正確な値ではありませんが，0.632…… に似ているのが気になりました．実は，これは① の近似式として使えるようです．実際，n 人の席替えで，各生徒が前と同じ席に座らない確率が $\frac{n-1}{n}$ で，しかも，それぞれの場合が独立と仮定した場合，少なくとも1人が前と同じ席になる確率を P'_n とおくと

$$P'_n=1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^n \text{ ですが，}$$

$$\lim_{n\to\infty} P'_n=1-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=1-e^{-1}$$

つまり，$\lim_{n\to\infty} P'_n=\lim_{n\to\infty} P_n$ になるからです．

最後に，ここで求めた 0.632 …… という数値は，くじ引きによる席替え以外にも応用できることでしょう．難しく表現すれば「2つの可算集合の間に1対1対応が存在するとき，無作為に対応を変えて新たな1対1対応を作ったとき，前と同じ対応になる対が存在する場合は，$1-e^{-1}$ の確率でおこりうる」ということでしょうか．

トランプのスペードのAから13までの13枚のカードをよく混ぜてから，順に1枚ずつめくって見ていきます．そのとき，どこかの n 番目に n の数値のカードが出てくる確率（例えば，8番目に8が出たり，最初にAが出たり）は，やはり 0.632 でしょう．

食塩の結晶を溶かしてから，また同じ形の結晶に固めることができれば，その結晶内で前と同じ位置になる分子が存在する確率も 0.632 だと思うのですが，しかし，これは結晶の対称性も考えると結果は違っているかもしれません．

クラス全員でパーティーをやったとき，全員が外見は同じ形に包装をされたプレゼントを持って来た．もちろん中身は違う．さて，余興でだれからのかわからないプレゼントを自由に選ぶことになった．このとき，全員が，幸運にも他の人からのプレゼントを手にすることのできる確率は 0.378 です．

（なかむら こういち　長野県須坂東高等学校）