2×2 行列に関する古市の問題について

要　真隆

1. はじめに

これから紹介する問題は，３年の文系の代数・幾何（行列）の授業で古市（こいちと読む）という女生徒から発せられた質問である．この質問は行列 A, B に対して，一般に，$AB \fallingdotseq BA$ ということを具体例を使って示したときに，生徒の心の中に単純な疑問として発せられたものである．そのとき，私はその単純な質問に対して自信をもって答えることができず，その生徒に“今度の授業までの先生の宿題ね”と念を押され，この問題を考えることになったのである．このことについて，面白い結果を得たので述べてみたい．

2. 古市の問題とは

> 2×2 行列 A, B に対して
> (1)　A, B の各成分は整数ですべて異なり，0 でない．
> (2)　B は A の整数倍（A は B の整数倍）ではない．＜注１＞
> (3)　$AB=BA$
> の３条件を満たす行列 A, B は存在するか？
> ―― 生徒の質問から ――

$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$ のとき，$AB=BA$ は成立する．

したがって，条件 (1) がなければこのような行列 A, B は確かに存在する（この例で生徒は，0 を使わず，同じ数を２度使わないでできないかと疑問に思ったらしい）．

また，$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$（単位行列）のとき，$AB=BA$ が成り立ち，上のことと同様なことがいえる．

更に，条件 (2) を満たさない行列

$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $B=5A=\begin{pmatrix}5&10\\15&20\end{pmatrix}$ に対しては

$$AB=A(5A)=5A^2$$
$$BA=(5A)A=5A^2$$

となり，$AB=BA$ が成り立ち，条件 (1), (3) を満たす．

また，B が A の逆行列のとき

例えば，$A=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}$ とすると $AB=BA=E$ が成り立つが，2, 3 を２回使っているので条件 (1) を満たさない．

また，$A=\begin{pmatrix}2&4\\6&8\end{pmatrix}$, $B=A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&\frac{1}{2}\\\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$ のとき

$AB=BA=E$ が成り立ち，各成分はすべて異なり 0 でないが，整数でない成分があるので条件 (1) を満たさない．

すなわち，条件 (1)，または (2) がなければ，$AB=BA$ となる行列を無数に見つけることができる．

では，条件 (1)〜(3) を満足する行列 A, B は存在するか？　あれば具体例をあげよというのが，この問題の主張である．答は YES？ NO？

3. 古市の問題の行列の存在証明

実は，答は YES．しかも，1 から 8 までの整数を１回のみ使って，条件 (1)〜(3) を満たす行列を幾つか見いだすことができる．＜注２＞

（例）　$A=\begin{pmatrix}8&3\\2&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7&6\\4&1\end{pmatrix}$ のとき

$AB=BA=\begin{pmatrix}68&51\\34&17\end{pmatrix}$ となる．

また，$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}24&-8\\-12&4\end{pmatrix}$ のとき

$$AB=BA=O\ (O：\text{零行列})$$

となり，可換な零因子の中にこのような行列を見いだすことができる．<注３>

では，このような行列 A, B が存在することを示そう．

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}$ とすると

$$AB=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\underline{ap}+br&aq+bs\\cp+dr&cq+\underline{ds}\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\underline{ap}+cq&bp+dq\\ar+cs&br+\underline{ds}\end{pmatrix}$$

$AB=BA$ のとき

$$\begin{cases}br=cq & \cdots\cdots \langle 1\rangle\\ aq+bs=bp+dq & \cdots\cdots \langle 2\rangle\\ cp+dr=ar+cs & \cdots\cdots \langle 3\rangle\end{cases}$$

<2> から，$b(p-s)=q(a-d)$ …… <4>

<3> から，$c(p-s)=r(a-d)$ …… <5>

<4> から，$p-s=\dfrac{q}{b}(a-d)\ (b\neq 0)$ …… <6>

<5> から，$p-s=\dfrac{r}{c}(a-d)\ (c\neq 0)$ …… <7>

<1> より，$\dfrac{q}{b}=\dfrac{r}{c}$ であるから，<6> $\Longleftrightarrow$ <7>

したがって，$AB=BA$ のとき

(＊) $br=cq$（すなわち $b:q=c:r$）…… (1)

$p-s=\dfrac{r}{c}(a-d)=\dfrac{q}{b}(a-d)$ …… (2)

(1) から，0 でないすべて異なる b, r, c, q が選べる．このとき，$\dfrac{r}{c}\neq 0$（または $\dfrac{q}{b}\neq 0$）で，$a\neq d$ なる a, d を選べば (2) から $p-s\neq 0$　よって，$p\neq s$ なる p, s が選べる．更に，$a\neq p$, $d\neq s$ のように独立に選べるから，$a\neq d\neq p\neq s$　しかも，すべて 0 でないようにできる．(1) と (2) とは互いに独立であるから，行列 A, B の各成分はすべて異なり，0 でないようにできる．

例えば，$b=2$，$r=3$，$c=1$，$q=6$ とすると

$$\begin{pmatrix}&\overset{b}{2}\\ \underset{c}{\boxed{1}}&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&\overset{q}{6}\\ \underset{r}{\boxed{3}}&\end{pmatrix}$$

更に，$a=7$，$d=4$ とおくと $\dfrac{r}{c}=3$ であるから

$$p-s=3\times(7-4)=9$$

そこで，$p=8$，$s=-1$ とすると

$$A=\begin{pmatrix}\overset{a}{7}&2\\1&\underset{d}{4}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\overset{p}{8}&6\\3&\underset{s}{-1}\end{pmatrix}$$

このとき，$AB=\begin{pmatrix}7&2\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8&6\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}62&40\\20&2\end{pmatrix}$

$$BA=\begin{pmatrix}8&6\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7&2\\1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}62&40\\20&2\end{pmatrix}$$

となり，$AB=BA$ が成立する．

ゆえに，行列 A, B は条件 (1)〜(3) を満たす．

4. 古市の問題の行列の求め方

$$AB=BA$$

A, B の各成分は整数ですべて異なり，0 でない．

$$B\neq \alpha A\ (\alpha：\text{整数})$$

となる行列 A, B の求め方

(1)　かってな数，例えば③を思い浮かべそれを整数倍する．例えば<u>2倍</u>して 6 を図の位置に書く．

$$\begin{pmatrix}&3\\&\end{pmatrix}\overset{\text{2倍}}{\curvearrowright}\begin{pmatrix}&6\\&\end{pmatrix}$$

(2)　次に，③，6 と異なる数 $\boxed{2}$ を思い浮かべ，<u>2倍</u>して $\boxed{4}$ を図の位置に書く．

$$\begin{pmatrix}&\\ \boxed{2}&\end{pmatrix}\underset{\text{2倍}}{\curvearrowright}\begin{pmatrix}&\\ \boxed{4}&\end{pmatrix}$$

(3)　更に，3，6，2，4 と異なる数を思い浮かべ $\#_1$，$\#_2$ を記入する．例えば，$\#_1=8$，$\#_2=5$

$$\begin{pmatrix}\#_1&\\&\#_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&\\&\end{pmatrix}$$

(4)　更に，$*_1-*_2=2(\#_1-\#_2)=2\times(8-5)=6$ を満たす，(1)〜(3) で求めた 3，6，2，4，8，5 と異なる $*_1$，$*_2$ を探す．例えば，$*_1=7$，$*_2=1$

$$\begin{pmatrix}&\\&\end{pmatrix}\begin{pmatrix}*_1&\\&*_2\end{pmatrix}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} \#_1 & ③ \\ \boxed{2} & \#_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} *_1 & \overset{\triangle}{6} \\ \boxed{4} & *_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

ここで，$A=\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば

$AB=BA$　が成り立つ．

── 演 習 問 題 ──

1．(＊) を満たす行列 A, B を作れ．

2．1から8までの整数を1回のみ使って，上で示した例と異なる例を幾つか作れ．

＜注1＞　ここにあげた条件(2)は，実は私が後で付け加えたものである．

＜注2＞　このような行列 A, B の組 (A, B) は32通りしかない．

> すなわち，1から8までの整数を1回のみ使って，$AB=BA$ を満たす行列 A, B ＜(＊) を満たす行列＞ の組 (A, B) は32通りしかない．

$$A=\begin{pmatrix} & ○ \\ \square & \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} & \triangle \\ \square & \end{pmatrix}$$

α倍

$$\begin{pmatrix} \#_1 & ○ \\ \square & \#_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} *_1 & \triangle \\ \square & *_2 \end{pmatrix}$$

α倍

$$*_1-*_2=\alpha(\#_1-\#_2)$$

αが整数のとき，$AB=BA$ を満たすのは，$\alpha=2$, 4 の場合しかありえない．

これらを示すと右表のようになる．更に，①～④型の代表の行列をそれぞれあげると右表のようになる．例えば，①型の行列の1組は

α	型	(○, △)	(□, □)
2	①	(1, 2)	(3, 6)
	②	(1, 2)	(4, 8)
	③	(2, 4)	(3, 6)
4	④	(1, 4)	(2, 8)

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

…… ☆

で，☆ と $1\leftrightarrow2$, $3\leftrightarrow6$ の左右の入れ替えで2通りある．

また，☆ で $(1, 2)\leftrightarrow(3, 6)$ の上下の入れ替えと，これらの行列の $1\leftrightarrow2$, $3\leftrightarrow6$ の左右の入れ替えとで2通りある．

	A	B
①	$\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$
②	$\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$
③	$\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$
④	$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

更に，☆ で $7\leftrightarrow5$, $8\leftrightarrow4$ の斜めの入れ替えと，これらの行列の $7\leftrightarrow8$, $5\leftrightarrow4$ の左右の入れ替えとで2通りある．

これらはそれぞれ互いに独立であるから，①型の行列は全部で $2\times2\times2=8$ 通りある．

②～④型の行列についてもそれぞれ8通りあるから，1～8までの整数を1回のみ使って $AB=BA$ を満たす行列 A, B の組 (A, B) は全部で32通りしかない．

＜注3＞　このことは，零因子には逆行列が存在しないことを考慮して，可換な零因子を求める公式に基づくものである．

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\quad B=k\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \text{のとき}$$

$$AB=BA=O\ (O：\text{零行列})$$

ただし，$\Delta=ad-bc=0$，kは定数

可換な零因子については，行列の固有値を用いても求めることができる．

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ において，ケーリー・ハミルトンの定理を用いれば

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=0 \quad \cdots\cdots ①$$

いま，行列Aの固有方程式

$$x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0$$

の2つの解を λ_1, λ_2 とすれば，これらは行列Aの固有値である．これらを用いると ① は

$(A-\lambda_1E)(A-\lambda_2E)=O$ と変形できる．

一般に，$A-\lambda_1E\neq O$，$A-\lambda_2E\neq O$

であるから，$A-\lambda_1E$，$A-\lambda_2E$ は零因子である．

これはまた可換であり

$$(A-\lambda_2E)(A-\lambda_1E)=O$$

となる．したがって，$A-\lambda_1 E$, $A-\lambda_2 E$ は可換な零因子なのである．

このような零因子の中には必ず同じ数があるので，条件 (1) を満たさない．

例えば　$A=\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ とすると

$$A^2-9A+8E=O$$

$$\therefore \quad (A-E)(A-8E)=O$$

よって，$A-E=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $A-8E=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

ここで改めて

$A=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ とおくと

$AB=BA=O$ で同じ数 2, 3 を含む．

しかし，$B'=4B$ とおくと $AB'=B'A=O$ となり，条件 (1)～(3) を満たす行列 A, B' を求めることができる．　　（参考）数研通信 No. 9　p. 8～10

<注 4>　更に，次に示す行列Aと交換可能な行列Bの条件（$）を用いても条件 (1)～(3) を満たす古市の問題の行列 A, B を求めることができる．

（$）	$A\neq kE$ のとき（t', s' は任意のスカラー） $B=t'A+s'E \iff AB=BA$

（例）　$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=3A+2E$ とすればよい．

5. おわりに

この質問を受けた次の授業のとき古市君から，“先生，宿題やってきたー” と再び問われ（生徒はとっくにこの質問のことは忘れていると思っていたが），1時間内で，古市の問題の行列の具体例およびその求め方について説明した．その内容が本稿である．その生徒は，求め方がわかり大変喜んでいた．思わぬ質問を受けそれを考えて，実は私も感動したのである．生徒と共に学ぶとは，こういうことをいうのだと思った．今後は，古市の問題に関する授業を充分に時間をかけてやってみたい．本稿が，授業をする上で何かの参考になればと思う．

（かなめ　まさたか　埼玉県立南稜高等学校）

<付記>　　<注 2> の行列 A, B の組 (A, B) をすべて書き上げると

①型	A	B	②型	A	B	③型	A	B	④型	A	B
1	$\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	3	$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	3	$\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	3	$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$	5	$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$	5	$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$	5	$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$	7	$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$	7	$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$	7	$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$